Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра общей физики

Осташев В.Б.

Часть IV

Электромагнетизм:

Электростатика. Электрический ток

Конспект лекций

Санкт-Петербург

2024

УДК ___
Осташев В.Б. «Часть IV. Электромагнетизм: Электростатика. Электрический ток»: Конспект лекций. СПбГТИ(ТУ). СПб, 2024,– 125 с.

В лекциях рассмотрены …,
…
…
…
…
…
…
…
…
…
…
…
…
…
.

Рис. 62, табл. 2, библиогр. 4 назв.

…

.

Часть IV. Электромагнетизм: Электростатика. Электрический ток

Содержание

Принятые основные обозначения

Df.	– определение,
Th.	– теорема,
]	– пусть,
[	– тогда
t	– время, [с].
$\bar{r}$	– радиус-вектор, [м],
$r = \lvert\bar{r}\rvert$	– абсолютное значение радиус-вектор, [м],
$\Delta\bar{r}$	– приращение радиус-вектор, [м],
$d\bar{r}$	– элементарное приращение радиус-вектор, [м],
V	– объём, [м^3],
V_1	– название фигуры, тела с объёмом *V*,
$\bar{S}$, S	– вектор ориентированной поверхности, площадь поверхности [м^2],
$d\bar{S}$	– элементарный вектор ориентированной поверхности, [м^2],
S_1	– название поверхности с площадью *S*,
l	– длина кривой, [м],
l_1	– название кривой длиной *l*,
$d\bar{l}$	– элементарный вектор касательной к кривой, [м],
$\bar{\mathrm{v}} = \frac{d\bar{r}}{dt}$	– вектор скорости, [м/с],
$\mathrm{v} = \lvert\bar{\mathrm{v}}\rvert$	– абсолютное значение вектора скорости, [м/с],
$\mathscr{v} = \frac{dS}{dt}$	– скалярная скорость, [м/с],
$\bar{a}$	– ускорение, [м/с^2],
$\bar{\tau}$	– единичный вектор касательной, [–],
$\bar{n}$	– единичный вектор нормали, [–],
$\bar{e}_r = \frac{\bar{r}_{12}}{r_{12}}$	– единичный вектор направления (параллелен вектору $\bar{r}_{12}$), [м],
$\bar{\omega}, \omega$	– угловая скорость и её абсолютная величина, [с$^{-1}$], [*рад/с.*],
$\bar{F}$	– сила, [Н],
m	– масса, [кг],

$\bar{p}$ – импульс, [кг·м/с],

$\bar{\text{M}}$ – момент силы, [Н·м],

$\bar{L}$ – момент импульса, [м/с],

A – работа, [Дж],

$\bar{E}$, E – вектор напряжённости электрического поля и его абсолютная величина (*в зависимости от контекста*), [В/м],

$\bar{D}$, D – вектор электрического смещения и его абсолютное значение (вектор индукции электрического поля – *устар.*) [Кл/м^2],

T – кинетическая энергия, [Дж],

U – потенциальная энергия (*потенциальная энергия тела, взято из механики*), [Дж],

W – потенциальная энергия (*потенциальная энергия поля, заряженной частицы в поле*), [Дж],

U – напряжение на участке цепи (*в зависимости от контекста*), [В],

φ – потенциал, [*В*],

q, Q – заряд (*физическая величина заряд*) [Кл]

e – элементарный заряд, $e = 1.60217653 \cdot 10^{-19}$ Кл,

$\mathcal{E}$ – ЭДС, электродвижущая сила, [В],

R – сопротивление (*в зависимости от контекста*) [Ом],

I – сила тока [А],

Q, dQ – количество теплоты и элементарное количество теплоты (в зависимости от контекста),

$\Phi(x, y, z)$,

$\Phi(x, y, z, t)$ – скалярное поле (скалярная функция координат либо скалярная функция координат и времени),

$\Phi_{\bar{A}}$ – поток векторного поля $\bar{A}$

ε – диэлектрическая проницаемость среды [–]

ε_0 – электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума – *устар.*) [Ф/м]

$d...$ – значок элементарной величины, элементарного приращения или дифференциала (*с математической точки зрения*).

$<...>$ – средняя величина.

1. Электростатическое поле в вакууме

1.1. Физические и математические поля

Физическим полем называется вид материи наряду с веществом. Физические поля передают взаимодействия между телами. Об их существовании мы знаем по существованию взаимодействия между телами.

Математическим полем называется область пространства ($\mathbb{R}^n$), в каждой точке которого задана математическая величина.

Поля бывают скалярными, векторными, тензорными и т.д.

Векторным полем называют область пространства ($\mathbb{R}^n$), в каждой точке которого задана векторная величина.

Математической моделью физического поля в физическом пространстве чаще всего является векторное поле в математическом $\mathbb{R}^3$ пространстве (в частности для электростатического поля).

1.2. Закон Кулона. Напряженность, потенциал

1.2.1. Закон Кулона

Закон. Точечные заряды (заряженные частицы) взаимодействуют с силами пропорциональными величине заряда каждой частицы и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними.

$$F_{кул.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\left[СИ\right], \qquad (1.1)$$

где

ε - диэлектрическая проницаемость среды

ε_0 - электрическая постоянная.

Либо

$$F_{кул.} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\left[СГС\right] \qquad (1.2)$$

В *векторном виде* закон Кулона имеет вид:

$$\overline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overline{e}_r, \qquad (1.3)$$

где

$$\overline{e}_r = \frac{\overline{r}}{r} \qquad (1.4)$$

$\overline{e}_r$ – единичный вектор направления.

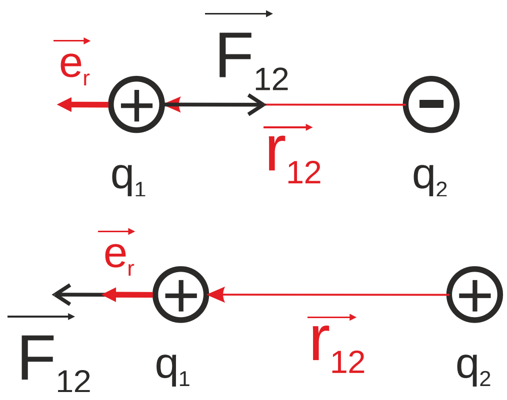


Рисунок 1.1
Закон Кулона – вектора сил

Знак плюс в уравнение указывает на то, что одноименные заряды отталкиваются, разноименные – *притягиваются*.

Ещё одна форма записи, подставив в выражение единичный вектор направления:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\bar{r} \tag{1.5}$$

Замечание. Отметим, что поле кулоновских сил является *центральным* и, следовательно, *консервативным*.

1.2.2. Электрический заряд

Электрический заряд – физическая величина, введённый в предыдущем пункте, есть свойство физических тел создавать электростатическое поле и воздействовать посредством него на другие тела, имеющие электрический заряд. Эта величина в системе СИ измеряется в *кулонах* (*обозначение* $[\text{Кл}]$, *международное обозначение* $[C]$).

Если следовать логике построения теории, можно ввести её также, как *массу* (*инертную или гравитационную*). Просто, будем утверждать, что существует свойство тел, пропорционально которому тела будут притягиваться или отталкиваться в ходе электромагнитных взаимодействий.

Допустим, рассмотрим несколько металлических шариков, по крайней мере, два из которых являются совершенно идентичными. Зарядим тем или иным образом один из этих шариков и ещё один, любой на выбор. Ну, скажем, потрём эбонитовую палочку о шерстяные штанишки ☺ и прикоснёмся к одному из шариков. Потом повторим действие. Измерим силу, с которой эти шарики будут притягиваться или отталкиваться… А теперь прикоснёмся первым шариком к точное его копии, которая в нашем случае пока что не заряжена. Если следовать логике и здравому смыслу (*так и есть на самом деле*), заряд поровну разделится между двумя шариками и, следовательно уменьшится вдвое у первого шарика. Повторим эксперимент по измерению силы… И так далее. Если при уменьшении заряда в два раза сила взаимодействия будет так же уменьшаться в два раза, мы вполне можем ввести такую физическую величину и измерять её значение, скажем, по притяжению или отталкиванию от эталонного тела. На самом деле, метрологически величина «*заряд*» вводится через силу электрического тока и время. Но сейчас это не важно.

С другой стороны, с точки зрения современных представлений, заряд – есть фундаментальное свойство, присущее элементарным частицам и изменяется кратно элементарному заряду[1]:

$$e = 1.60217653 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Так заряд электрона равен $-e$, заряд протона $+e$. Заряд заряженного тела определяется наличием у него лишних электронов, заряд которых не скомпенсирован зарядом протонов атомных ядер. Либо недостатком электронов и наличием протонов в атомных ядрах, чей заряд не скомпенсирован зарядом электронов. Заряд всех остальных элементарных частиц так же изменяется кратно e. Исключение составляют *кварки* – субэлементарные частицы, из которых состоят какие частицы, как нейтрон, протон и т.д. их заряд кратен $\frac{1}{3}e$. Однако они не могут существовать отдельно, не сливаясь в частицу и суммарный заряд наблюдаемой частицы всё равно будет кратен элементарному заряду. Но это уже материал для раздела «Квантовая механика», который будет изложен позже.

Для электрического заряда существует закон сохранения – суммарный заряд *электрически изолированной системы* ***остаётся постоянным***. Здесь под электрически изолированной системой мы понимаем систему, которой мы не передаём и у которой не отбираем то или иное количество электрического заряда (*передавая или отбирая у неё то или иное количество заряженных частиц*). Этот закон следует прежде всего из наблюдений на поведением заряженных тел (*из эксперимента*) и из фундаментальных свойств элементарных частиц. В нашем случае это сводится к постоянному общему числу электронов и протонов, как носителей отрицательного и положительного заряда и из закона сохранения материи – сами частицы не могут никуда деться и не могут возникнуть из ниоткуда.

С более общей точки зрения, как фундаментальное свойство элементарных частиц, можно сказать, что если в каком-нибудь процессе у нас возникают или исчезают элементарные частицы (*скажем аннигиляция частицы и античастицы*), то совокупный электрический заряд, тем не менее, не может измениться. Аннигиляция электрона и позитрона (*антиэлектрона*) приводит к тому, что исчезают (*с образованием кванта электромагнитного поля – фотона*) одна частица с зарядом $-e$ и одна с зарядом $+e$. Суммарный заряд как был, так и остаётся равным нулю.

Закон сохранения заряда является, пожалуй, самым фундаментальным из всех законов сохранения. Вспомним, какие законы есть в нашем распоряжении: закон сохранения вещества (в виде закона сохранения количества вещества и закона сохранения

---

[1] Электрон (e^-), вместе с протоном (p^+) и нейтроном (n) являются «строительными элементами» вещества, из этих частиц состоят атомы и молекулы. Приём, протоны и нейтроны заключены внутри атомного ядра, электроны находятся на орбиталях атома и обеспечивают химическую связь либо способны свободно перемещаться внутри кристалла, обеспечивая тем самым электрическую проводимость. Электрический заряд тела есть разность между суммарным положительным зарядом атомных ядер и суммарным зарядом всех имеющихся в нём электронов. Исходно эти заряды равны. Добавление к телу свободных электронов или удаление части из них приводит к приобретению телом электрического заряда.

массы), закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и момента импульса, а теперь еще закон сохранения заряда.

Исходно самым первым и самым фундаментальным мы считали закон сохранения вещества. В исходной формулировке Ломоносова он гласит: «***Все перемены, в натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько присовокупится к другому***…». Однако, задумаемся – говорить о сохранении вещества (основной формы материи в нашем бытовом понимании) проще, имея в виду сохранение самого количества этого вещества в штуках атомов, молекул, ионов. Но, наверное, всё же, проще говорить о сохранении количества вещества в молях (физическая величина «количество вещества»). Однако, количество молей (количество вещества) данного химического соединения изменяется в ходе любой химической реакции. Количество атомов данного химического соединения остаётся постоянным в ходе любой химической реакции, однако изменяется в результате любой ядерной реакции. Количество «строительных элементов» самих атомов – элементарных частиц протонов, нейтронов и электронов изменяется в ходе любых реакций с элементарными частицами. О последних двух фактах мы, наверное, немного поговорим в конце курса физики.

И так. Для формулировки закона сохранения вещества закон сохранения количества вещества явно не подходит. Обратимся к закону сохранения массы (не важно, инертной или гравитационной, в конце концов, будем стоять на позициях постулата об эквивалентности Эйнштейна). В конце концов, именно в таком виде представляли этот закон его первооткрыватели. На первый взгляд он кажется абсолютно незыблемым. Но обратимся к релятивистской механике. Наблюдаемая масса начинает зависеть от скорости движения системы отсчета, в которой её рассматривают. К счастью, как мы отмечали в соответствующем разделе, релятивистская масса не является инвариантом и не является, по существу, характеристикой самого тела, как такового. Инвариантом является масса покоя и с ней в данном случае всё в прядке.

Теперь рассмотрим следующий пример. Пусть на Коллайдере или на каком-нибудь другом ускорителе разгоняются два пучка частиц. Их релятивистская масса значительно превышает массу покоя. При лобовом столкновении этих двух пучков частиц в ходе реакции с элементарными частицами возникнут новые частицы. Так вот их масса покоя будет уже превышать суммарную массу покоя исходных частиц – будет выполняться закон сохранения энергии (*с учётом приобретённой обоими пучками частиц кинетическими энергиями при разгоне на ускорителе*) и соотношение Эйнштейна между массой и энергией ($E=mc^2$). Мы, конечно, можем сказать, что данная дополнительная масса была когда-то массой того вещества, из которого была «выкачена» энергия для ускорения частиц. Однако однозначность и фундаментальность закона сохранения массы исчезает на глазах.

Что же мы имеем в результате «в сухом остатке»? По-прежнему выполняется закон сохранения энергии. И он по-прежнему остаётся незыблемым. Однако вспомним, что мы говорили, изучая этот закон. Этот закон, как и законы сохранения импульса и момента импульса, до некоторой степени является свойством модели, выбранной нами теории. Мы вполне могли бы написать физику без закона сохранения энергии (и такие попытки были). Это была бы другая физика – не удобная для решения задачек, не привычная и т.д., но её можно построить... Ни кто из нас не сомневается в данных законах на бытовом уровне. Но, как только речь заходит о глобальных процессах в рамках вселенной в целом и всей истории её развития, эти законы нам приходится спасать «руками». Напомним, что с точки зрения Общей Теории Относительности, импульс (и момент импульса) не сохраняются в глобальном масштабе. Для того, чтобы объяснить увеличение исходного количества энергии на ранних стадиях развития вселенной (иначе она бы назад «схлопнулась»в точку, так называемая теория инфляции) нам приходится вводить внешнее поле извне нашей вселенной. Напомним наконец, что законы сохранения импульса и энергии следуют из однородности и изотропности пространства и времени. Однако, глобально это не так – наше пространство и время не везде и не всегда были однородны и изотропны.

Так вот. Электрический заряд сохраняется и сохранялся везде и всегда при условии электрической изолированности системы (отсутствия внесения туда или удаления от туда заряженных частиц). И это глобальное свойство, не зависящее ни от каких внешних и внутренних факторов.

1.2.3. Напряженность электрического поля

Df. Напряженность электрического поля – это векторная величина, равная отношению силы, действующей на пробный заряд, внесенный в это поле, к величине этого заряда.

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} \tag{1.6}$$

Иначе, ***напряженность*** – это сила, действующая со стороны поля на единичный положительный заряд.

По ***физическому смыслу*** напряженность является силовой характеристикой поля.

Измеряется в *вольтах на метр*, $[В/м] = \frac{[В]}{[м]}$, где *вольт* $([В])$ – единица измерения потенциала электрического поля (*см. ниже*).

Напряжённость поля точечного заряда. Пусть пробный заряд, q' внесён в поле, создаваемое зарядом q. Рассмотрим закон кулона для этих двух зарядов:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\bar{e}_r$$

и подставим выражение силы в определение напряжённости электрического поля:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q'} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\bar{e}_r}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q\cancel{q'}}{r^2\cancel{q'}}\bar{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\bar{e}_r$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\bar{e}_r \tag{1.7}$$

Замечание: (1) Для точечного заряда напряженность является корректно определенной величиной и действительно характеризует само поле, т.к. не зависит от величины заряда, внесенного в это поле. (2) Поскольку сила кулона линейно зависит от величины заряда, её можно вычислить, как произведение напряжённости поля на величину заряда помещённой в данную точке частицы:

$$\bar{F} = q\bar{E} .$$

1.2.4. Принцип суперпозиции

Из *принципа суперпозиции*, рассмотренного нами для действия нескольких сил на тело, следует, что если на заряд действует сила, действующая со стороны поля, создающегося системой заряда, то величина этой силы будет равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны каждого заряда системы в отдельности.

Здесь под силой, действующей на заряд со стороны одного заряда системы, понимается сила взаимодействия этих двух зарядов при условии, что все остальные заряды системы отсутствуют (*экспериментальный факт для любой силы…*).

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n .$$

Запомним это и вспомним определение напряжённости.

По определению напряжённости:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} \Rightarrow \bar{F} = q\bar{E} .$$

Данное следствие напрямую вытекает из определения напряжённости. Именно в таком виде нам интересно использовать (*в практическом смысле, для решения задач*) физическую величину «напряжённость электрического поля». Вопрос в том, можем ли мы рассчитать её значение, зная напряжённости полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности?

Пусть заряд внесёт в поле, создаваемое не одним, а несколькими зарядами.

Подставим выражение принципа суперпозиции сил в определение вектора напряжённости:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i}{q} = \frac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + .. + \bar{F}_n}{q} .$$

Внесём сомножитель – величину заряда под квантиль суммы или (*иначе*) представим сумму сил, делённую на величину заряда, как сумму сил, каждая из которых разделена на эту величину:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{F}_i}{q} = \frac{\bar{F}_1}{q} + \frac{\bar{F}_2}{q} + \ldots + \frac{\bar{F}_n}{q}.$$

Но выражения, стоящие под знаком суммы (*либо отдельные слагаемые, что тоже самое*) есть не что иное, как напряжённости полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\bar{F}_i}{q}}_{\bar{E}_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{E}_i,$$

или

$$\bar{E} = \underbrace{\frac{\bar{F}_1}{q}}_{\bar{E}1} + \underbrace{\frac{\bar{F}_2}{q}}_{\bar{E}_2} + \ldots + \underbrace{\frac{\bar{F}_n}{q}}_{\bar{E}_n} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \ldots + \bar{E}_n.$$

Мы получили принцип суперпозиции для напряжённости электрического поля:

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^{n} \bar{E}_i = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \ldots + \bar{E}_n. \tag{1.8}$$

Вывод:

1. Напряжённость поля, создаваемого системой зарядов, будет равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.
2. Напряженность, как силовая характеристика электростатического поля корректно определена и действительно является характеристикой поля, так как зависит только от параметров заряда, создающего поле, геометрии и свойств пространства и не зависит от свойств и величины заряда, внесённого в поле.
3. Сила, действующая на заряженную частицу, вносимую в поле, может быть получена как произведение этой величины (*напряжённости электростатического поля*) на величину заряда этой частицы.
4. Суперпозиция консервативных полей есть консервативное поле. Любое электростатическое поле можно представить, как суперпозицию Кулоновских полей. Таким образом, ***электростатическое поле*** является ***консервативным полем***. Следовательно мы можем говорить о его *потенциальной энергии*.

Для изображения распределения напряжённости электрического поля (*в пространстве, на плоскости…*) используют понятие силовой линии. *Силовой линией* называется кривая, касательная в каждой точке которой совпадает с вектором напряженности.

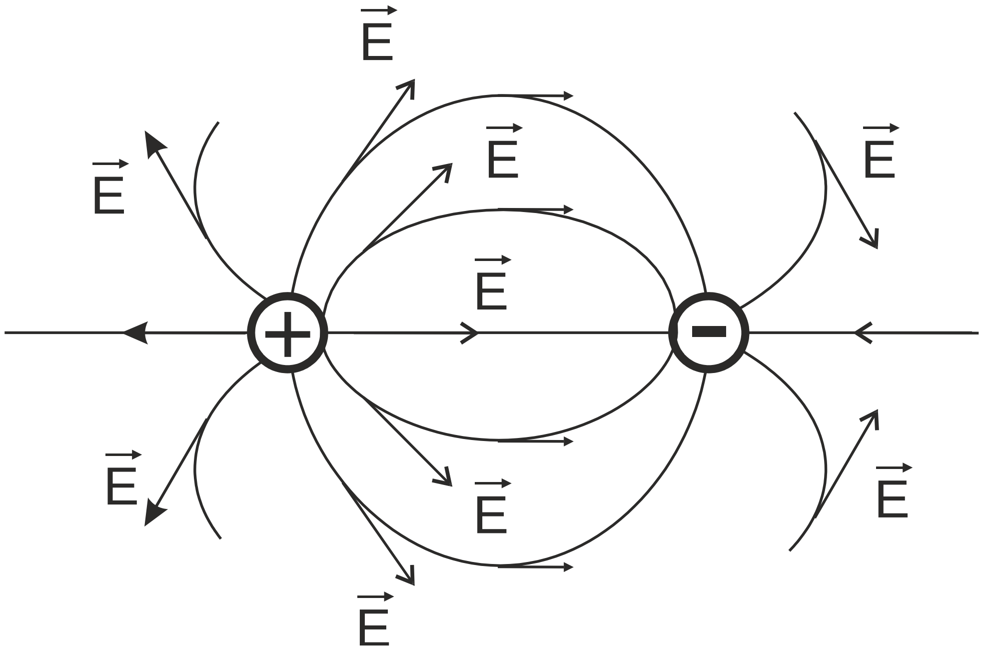


Рисунок 1.2
Силовые линии электростатического поля

1.2.5. Потенциал

1. Кулоновское поле (поле точечного заряда) является консервативным, т.к. является центральным (см. закон Кулона, центральные поля).
2. Поле, создаваемое системой зарядов, также будет консервативным, поскольку сумма консервативных полей будет консервативным полем.
3. Как для любого консервативного поля, для электростатического поля можно ввести понятие потенциальной энергии.

Df. Потенциалом называется отношение потенциальной энергии пробного заряда, внесенного в поле, к величине этого заряда

$$\varphi = \frac{W}{q}. \tag{1.9}$$

Иначе, ***потенциал*** – это потенциальная энергия единичного положительного заряда, внесенного в поле.

Измеряется в *вольтах,* $[B] = \frac{[Дж]}{[Кл]} = \frac{[Bm]}{[A]} = \frac{[м]^2[кг]}{[c]^3[A]}$. Международное обозначение $[V]$. Здесь $[A]$ – ампер, единица измерения силы тока, основная единица системы СИ.

Можно дать альтернативное определение потенциала (*оно удобно при рассмотрении законов, связанных с электрическим током*). Работа по перемещению частицы из точки ***(1)*** в точку ***(2)*** есть разность потенциальных энергий в начальной и конечной точках (*убыль потенциальных энергий*):

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Работа по перемещению заряда из точки $\boldsymbol{A}$ на бесконечность равна потенциальной энергии заряда в этой точке:

$$A_{\infty} = W_A - \underbrace{W_{\infty}}_{0} = W_A .$$

Здесь A_{∞} – работа по перемещению заряда из точки $\boldsymbol{A}$ в бесконечность, а под бесконечностью мы понимаем точку пространства, где поле убывает до нуля (*и, следовательно, нулю равна и его потенциальная энергия*).

Тогда:

$$\varphi = \frac{W}{q} = \frac{A_{\infty}}{q} . \tag{1.10}$$

Таким образом:

Df: Потенциал – это работа по перемещению пробного заряда из данной точки в бесконечность, отнесенная к величине этого заряда.

Физический смысл: потенциал – это энергетическая характеристика электростатического поля.

Для изображения распределения потенциала (*в пространстве, на плоскости…*) используют эквипотенциальные поверхности. *Эквипотенциальной поверхностью* называется поверхность, потенциалы в каждой точке которой равны.

Потенциал точечного заряда. Для точечного заряда имеем:

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q'} = \frac{1}{q'}\int_{\bar r_1}^{\infty} dA = \frac{1}{q'}\int_{\bar r_1}^{\infty} \bar F \cdot d\bar r = \frac{1}{q'}\int_{\bar r_1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q'q}{r^2}\bar e \cdot d\bar r =$$

$$= \frac{\cancel{q'}}{\cancel{q'}}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{\bar r_1}^{\infty}\frac{1}{r^2} d\left(\bar e \cdot \bar r\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{\bar r_1}^{\infty}\frac{1}{r^2} d\left(\frac{\bar r}{r}\cdot \bar r\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{\bar r_1}^{\infty}\frac{1}{r^2} d\left(\frac{\bar r \cdot \bar r}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{\infty}\frac{1}{r^2} d\left(\frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{\infty} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(0 - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} .$$

В итоге потенциал точечного заряда определяется выражением:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r} . \tag{1.11}$$

Для потенциальной энергии точечного заряда получаем:

$$W = q\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}. \tag{1.12}$$

Для потенциала так же справедлив принцип суперпозиции. Потенциал поля, создаваемого в данной точке системой зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности. В данном случае, термину «… полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности» мы придаём точно такой же смысл, как и раньше.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n \tag{1.13}$$

1.2.6. Взаимосвязь напряженности и потенциала

Замечание. В данном разделе курса физики потенциальную энергию мы будем обозначать, как ***W*** – *потенциальная энергия поля, заряженной частицы в поле*. Но в начале данного пункта вернёмся к обозначениям, принятым в механике: U – *потенциальная энергия тела*.

В механике доказывается, что сила, действующая на тело (*заряд, частицу*) в потенциальном поле, всегда равна минус градиенту от потенциальной энергии тела (*заряда, частицы*) в этом поле:

$$\bar{F} = -gradU \tag{1.14}$$

или (*в других обозначения*)

$$\bar{F} = -\nabla U \tag{1.15}$$

Здесь ***grad*** – градиент скалярной функции, вычисляемой по формуле:

$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}, \tag{1.16}$$

∇ – оператор набла:

$$\nabla \underline{?} = \frac{\partial \underline{?}}{\partial x}\,\underline{?}\,\bar{i} + \frac{\partial \underline{?}}{\partial y}\,\underline{?}\,\bar{j} + \frac{\partial \underline{?}}{\partial z}\,\underline{?}\,\bar{k}, \tag{1.17}$$

где вместо знака вопроса (***?***) надо подставить величину, на которую действует оператор и конкретный вид математической операции между производной и ортом оси координат (*для градиента это умножение вектора на скаляр*).

В подстановке имеем:

$$\bar{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}\right) \tag{1.18}$$

Покажем это (для потенциальной энергии тела в поле консервативных сил):

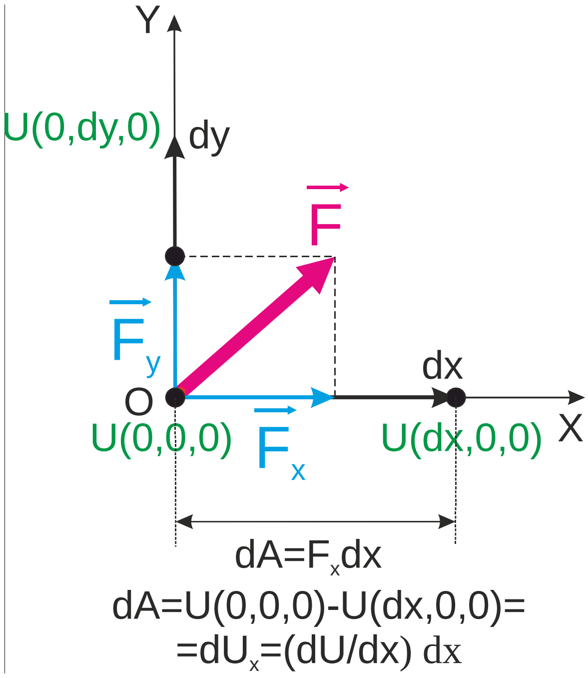


Рисунок 1.3

Иллюстрация связи силы и потенциальной энергии

$$A = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U .$$

Продифференцируем и вспомним определение элементарной работы:

$$\left.\begin{aligned} dA &= -dU \\ dA &= \bar{F}\cdot d\bar{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{F}\cdot d\bar{r} = -dU .$$

Пусть элементарное перемещение совпадает с осью $\overrightarrow{Ox}$

$$d\bar{r} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Ox} \Rightarrow \bar{F}\cdot d\bar{r} = F_x dr,\ dr \equiv dx \Rightarrow$$

$$F_x dx = -dU \Rightarrow F_x = -\frac{dU_x}{dx} .$$

Аналогично $\qquad F_y dy = dU_y, \quad F_z dz = dU_z .$

В итоге имеем:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \bar{F} = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\bar{k}\right) \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Более точно:

$$\left.\begin{aligned} dA &= -dU \\ dA &= \bar{F}\cdot d\bar{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{F}\cdot d\bar{r} = -dU$$

$$d\bar{r} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k} \Rightarrow \bar{F}\cdot d\bar{r} = \bar{F}dx\cdot\bar{i} + \bar{F}dy\cdot\bar{j} + \bar{F}dz\cdot\bar{k}$$

$$\bar{F}\cdot\bar{i} = F_x, \quad \bar{F}\cdot\bar{j} = F_y, \quad \bar{F}\cdot\bar{k} = F_z$$

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = F_x dx + F_z dy + F_z dz\,.$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy + \frac{\partial U}{\partial x}dz$$ – полный дифференциал.

Приравняем правую и левую часть выражения для элементарной работы:

$$F_x dx + F_z dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy + \frac{\partial U}{\partial x}dz\,.$$

И, наконец, приравнивая коэффициенты перед независимыми переменными ***dx***, ***dy*** и ***dz***, получаем

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}.$$

В итоге, имеем:

$$\bar{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}\right)$$

либо (*в других обозначениях*)

$$\bar{F} = -gradU\,,$$

$$\bar{F} = -\nabla U$$

Заменяя в выражении потенциальную энергию тела ***U*** на энергию частицы в электрическом поле ***W***, получаем:

$$\bar{F} = -gradW\,.$$

Тогда для вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ и потенциала $\boldsymbol{\varphi}$ имеем:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{-gradW}{q} = -grad\,\frac{W}{q} = -grad\ \varphi$$

$$\bar{E} = -grad\ \varphi$$

или

$$E = -\nabla\varphi\ .$$

В подстановке имеем:

$$\bar{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}\right)$$

По физическому смыслу ***grad*** указывает направление наискорейшего возрастания функции, и по величине равен скорости ее роста в данном направлении.

-grad – указывает направление наискорейшего убывания функции.

Замечание. Если направление градиента совпадает с осью $\overrightarrow{Ox}$, то для расчёта имеем следующее соотношение:

$$E = -\left|grad\ \varphi\right| = -\frac{d\varphi}{dx} \approx -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\,.$$

Для однородного поля (***E=const***) данное выражение будет точным

$$E = -\left|grad\ \varphi\right| = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\,,$$

так как

$$f'(x) = const \Rightarrow f(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = C_1 = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\,.$$

И ещё. Отсюда же следует, что проекция вектора напряжённости на направление вектора $\bar{l}$ будет равна производной потенциала по этому направлению:

$$E_l = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{l}}\ .$$

1.2.7. Изображение векторных полей

Повторим ещё раз определения:

Df1. Силовая линия – линия касательная, в каждой точки которой совпадает с вектором напряженности.

Df2. Эквипотенциальная поверхность – это поверхность, потенциалы в каждой точке которой равны.

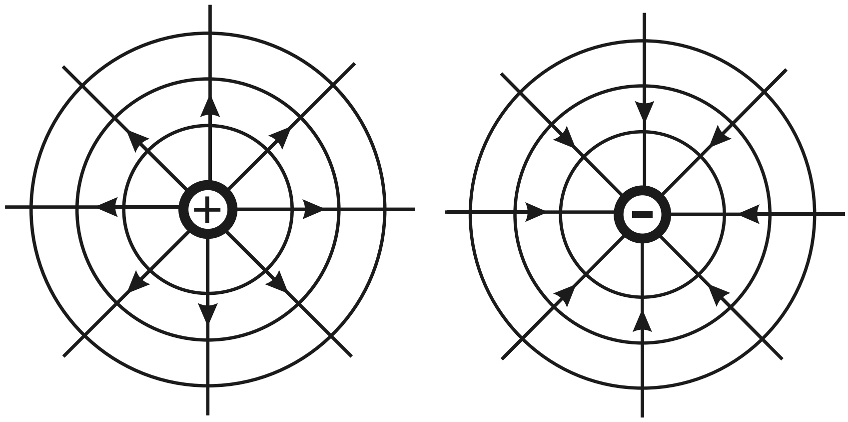
Основные свойства *силовых линий* и *эквипотенциальных поверхностей*:

1. Работа по перемещению заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю (*следует из определения*).
2. Изменение потенциала на одном и том же расстоянии вдоль силовой линии максимально (*следует из свойства градиента*).
3. Силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности (*ниже приведено физическое доказательство данного утверждения, хотя на самом деле данный факт также является общим свойством градиента*):

$$dA_{\varphi=const} = 0$$

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = q\bar{E} \cdot d\bar{r} = q\ E\ dr\cos\alpha$$

$$q\ E\ dr\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$



а **б**

Рисунок 1.4
Изображение поля точечного заряда
(а – положительного, б – отрицательного)

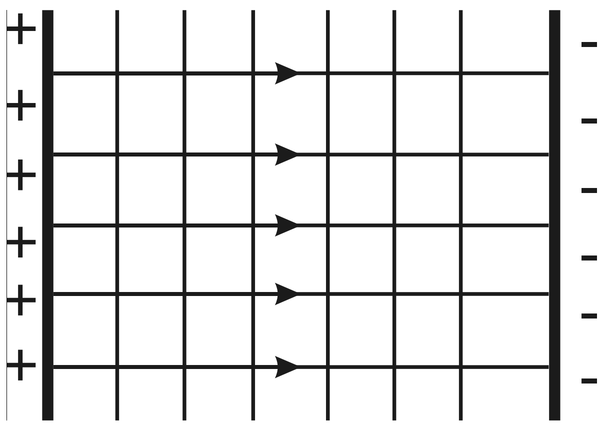


Рисунок 1.5
Изображение однородного поля (*плоского конденсатора*)

Последнее является частным случаем более общего утверждения:

$$d\,\bar{r} \times \nabla\Phi = 0$$

– «линии градиента, определяемая этим уравнением, перпендикулярна к поверхностям [равного] уровня»[2].

Здесь под поверхностью [равного] уровня понимается поверхность[3]:

$$\Phi(\bar{r}) \equiv \Phi(x, y, z) = \text{const}$$

Смысл в том, что данное утверждение, на самом деле, не имеет прямого отношения к «физическому смыслу физической величины *работа*». Перпендикулярность *градиента* поверхностям равного уровня есть свойство модели – свойство полей, являющихся *градиентом скалярной функции*. Но по физическому смыслу все эти поля есть поля потенциальных (консервативных) сил.

---

[2] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974., с.171, п. 5.5-1, (5.4-2)

[3] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974., с.168, п. 5.4-2, (5.5-1)

1.3. Интегральные и дифференциальные операторы

1.3.1. Интегральные операторы

Поток векторного поля через поверхность. Рассмотрим течение реки. Пусть площадь поперечного сечения потока реки рана $\boldsymbol{S}$, а скорость течения – $\boldsymbol{V}$. Рассчитаем поток воды $\boldsymbol{\Phi}$ – сколько воды в единицу времени протекает через поперечное сечение реки, [м^3/с].

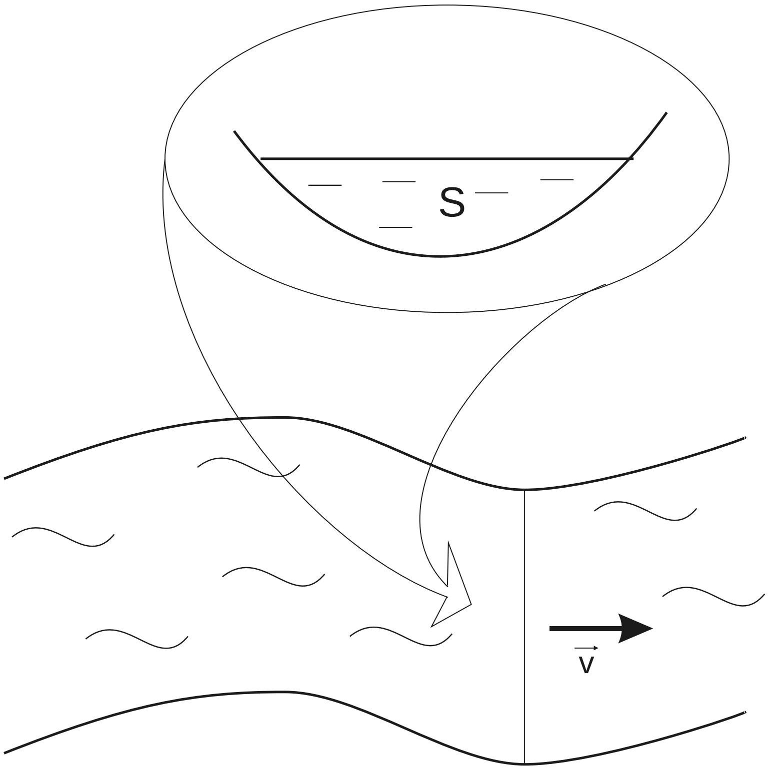


Рисунок 1.6
Общее представление о «потоке»

Рассмотрим, сколько воды протекает через сечение за единицу времени.

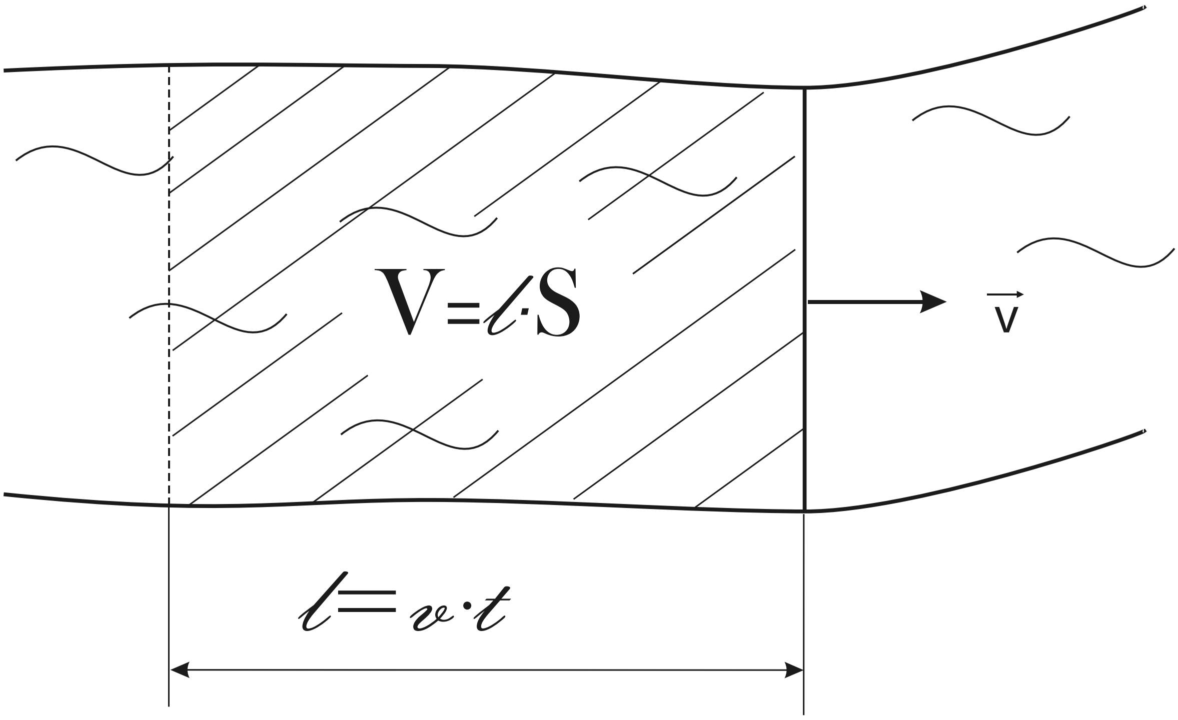


Рисунок 1.7
Поток в случаи однородного течения

За время ***t*** вся вода $l = v \cdot t$, находящаяся на расстоянии l от выбранного сечения, достигнет и пересечёт сечение. Таким образом, через сечение протечёт объём вода

$$V = l \cdot S = v\, t\, S\ .$$

Рассчитаем поток:

$$\Phi = \frac{V}{t} = \frac{v\, \cancel{t}\, S}{\cancel{t}} = v\, S\ .$$

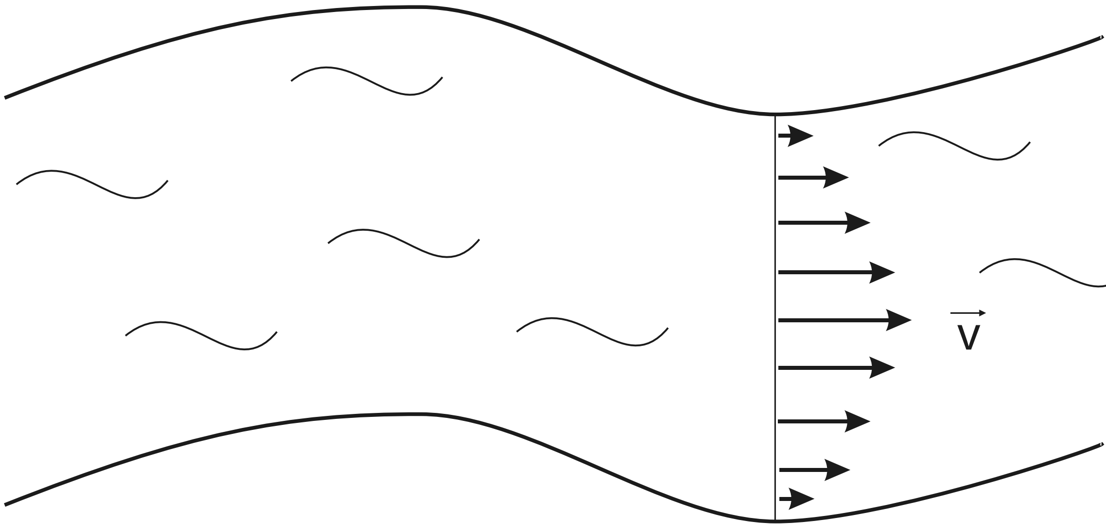


Рисунок 1.8
Поток для случая различия в абсолютных значениях скоростей по сечения

Далее. Теперь пусть скорость течения не равномерна по сечению реки – у берегов она течёт медленнее, посередине быстрее. Разобьём площадь сечения на маленькие кусочки, рассчитаем поток через них и просуммируем. В итоге получаем интеграл по площади сечения от скорости течения воды. *Ещё раз*. В этом случае надо не просто умножить площадь сечения на скорость, а проинтегрировать скорость по площади сечения раки:

$$\Phi = \int_{S_1} v\, dS\ ,$$

где $\boldsymbol{S_1}$ – поверхность, через которую течёт рассчитываемый нами поток.

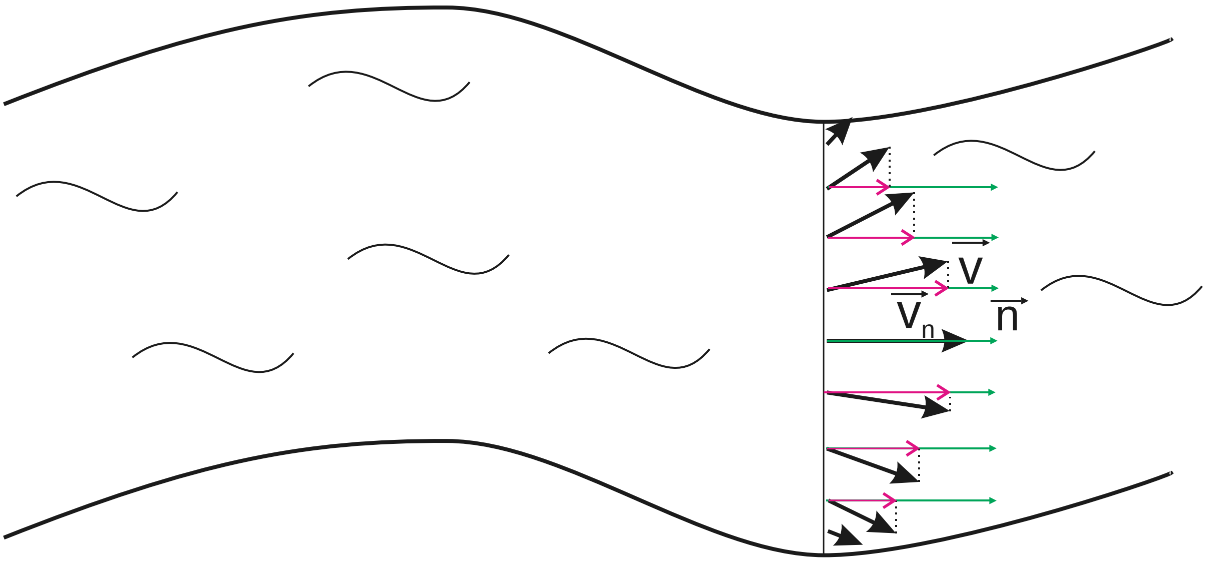


Рисунок 1.9
Поток в общем случае

Ещё усложним ситуацию. Пусть направление вектора скорости течения различно в разных точках реки. Для расчёта потока нас интересует составляющая скорости, параллельная направлению «вперёд». Однако, у реки могут присутствовать водовороты, завихрения потока… Для того, чтобы правильно рассчитать поток, мы должны вычислить скалярное произведение от вектора скорости на единичную нормаль к поверхности, по которой мы считаем поток:

$$\Phi = \int_{S_1} \overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{n}}\, dS\,.$$

Введём понятие ***вектора ориентированной поверхности***. Под вектором ориентированной поверхности понимается вектор, перпендикулярный поверхности (*параллельный единичной нормали*) и численно равный (*равный по абсолютной величине*) площади поверхности:

$$\overline{S} = S\,\overline{n}\,.$$

Тогда для элементарной (*бесконечно малой*) поверхности имеем элементарный вектор ориентированной поверхности:

$$d\overline{S} = \overline{n}\, dS$$

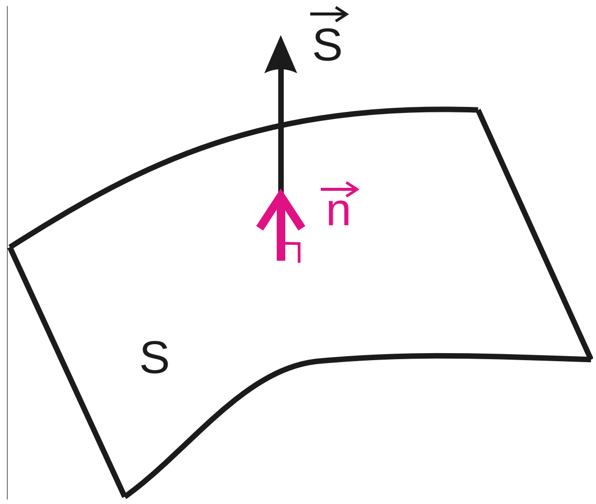


Рисунок 1.10
Вектор ориентированной поверхности

В итоге для потока воды имеем

$$\Phi_{\mathrm{v}} = \int_{S_1} \overline{\mathrm{v}} \cdot d\overline{S}\,.$$

Df. Потоком векторного поля $\overline{A}$ через поверхность ***S₁*** называется интеграл вида:

$$\Phi_{\mathrm{A}} = \int_{S_1} \overline{A} \cdot d\overline{S}\,. \tag{1.19}$$

Точнее

$$\Phi_A = \iint_{S_1} \overline{A} \cdot d\overline{S}\,,$$

но обычно мы будем опускать значок двойного интеграла.

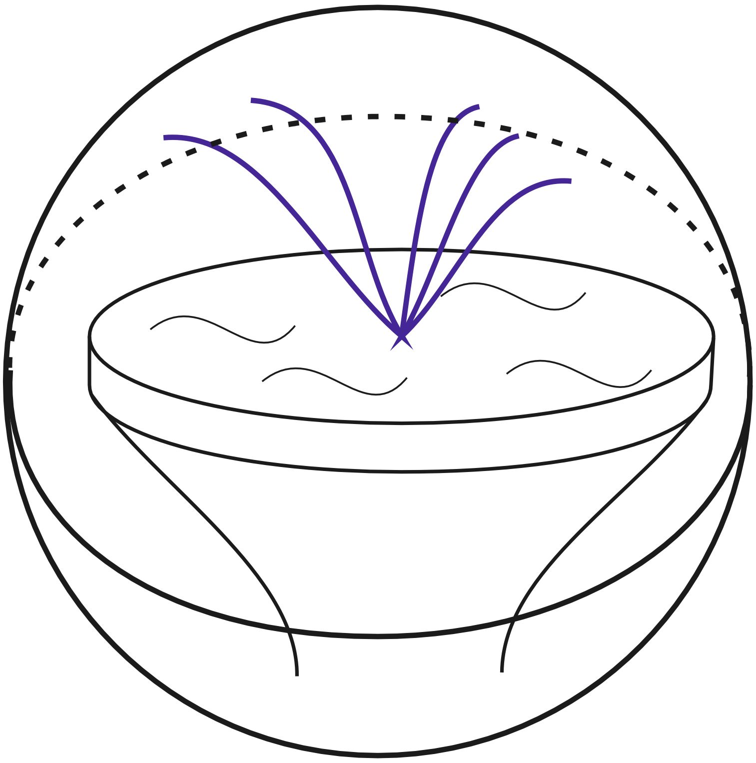


Рисунок 1.11
Поток через замкнутую поверхность

Поток через замкнутую поверхность. Пусть мы имеем ключ, который бьёт посередине озера или фонтан. Мы хотим рассчитать, сколько воды вытекает из этого пруда или фонтана во все стороны. Исключим на время из рассмотрения трубу, по которой подводится вода в фонтан или подземный поток воды… Чтобы вычислить нужную величину нам надо рассчитать поток через замкнутую поверхность, охватывающую наш фонтан или пруд:

$$\Phi_{\text{A}} = \oint_{S_1} \overline{A} \cdot d\overline{S} . \tag{1.20}$$

Точнее

$$\Phi_A = \oiint_{S_1} \overline{A} \cdot d\overline{S} ,$$

И, по существу, нам не важна форма этой поверхности, так как вся вода вытекающая из фонтана, так или иначе, протечёт через эту поверхность.

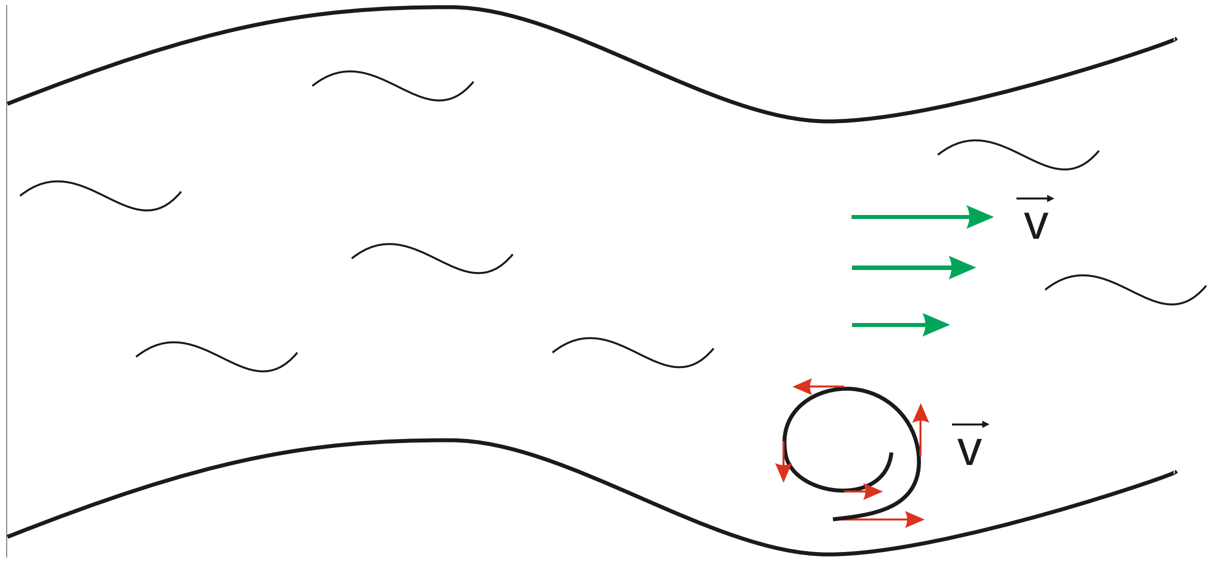


Рисунок 1.12
Вихревое движение

Теперь рассмотрим ситуацию, когда часть воды закрутило в водоворот на изгибе реки. Мы хотим вычислить характеристику, определяющую именно вращательный процесс для потока – сколько воды и с какой скоростью вовлечено в это вращение. Такой характеристикой является ***циркуляция***.

Циркуляцией векторного поля называется *интеграл от скалярного произведения вектора* на *элементарный вектор*, *касательный к кривой* по любой *замкнутой кривой*, охватывающей центр. Точнее, ***циркуляция*** – ***интеграл по длине кривой, охватывающий контур***, вычисляемый как:

$$\oint_{l_1} \bar{A} \cdot d\bar{l} \quad . \tag{1.21}$$

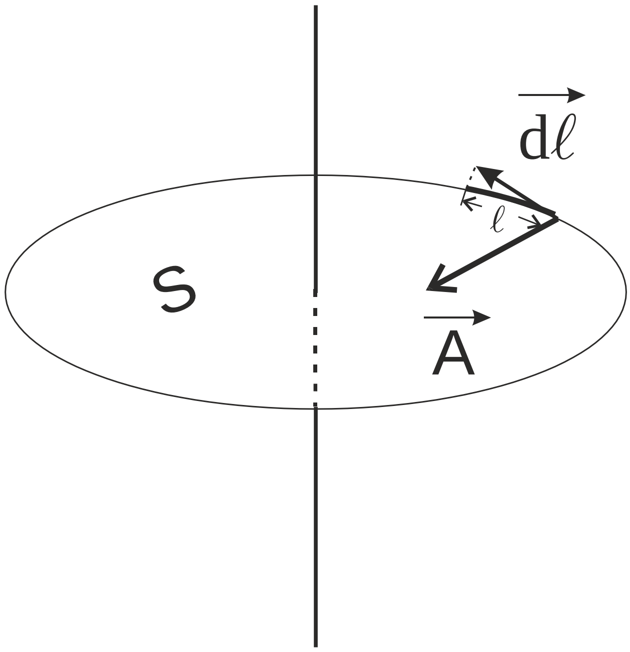


Рисунок 1.13
Циркуляция

Ещё раз. Интеграл от скалярного произведения вектора поля на элементарный вектор касательной к контуру по некоему замкнутому контуру называется ***циркуляция*** (*сумма абсолютных значений всех элементарных векторов длины кривой будет равна **длине кривой***).

В случае «водоворота» на нашей реке будем иметь:

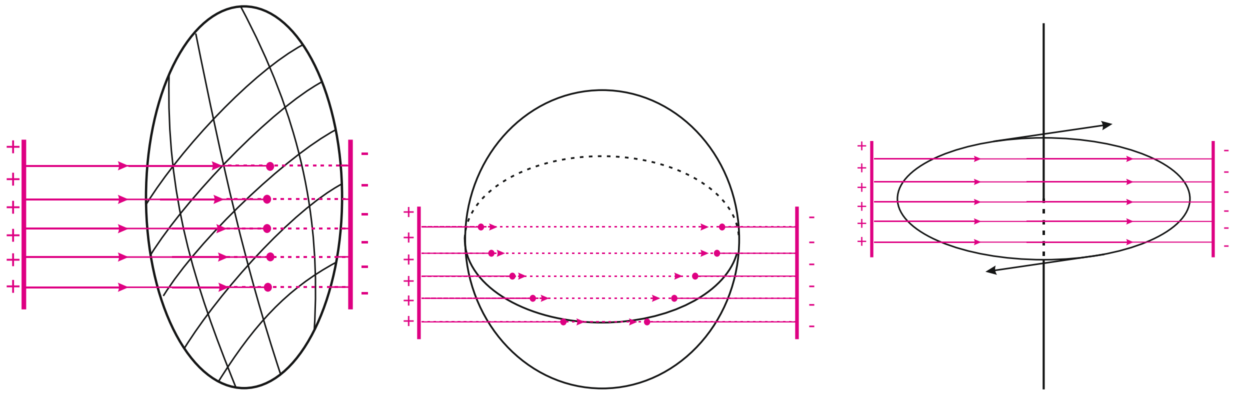
$$\oint_{l_1} \overline{\mathrm{v}} \cdot d\overline{l} = \oint_{l_1} v dl = v \int_{l_1} dl = v \cdot 2\pi R = 2\pi R^2 \omega = 2S\omega .$$

Здесь:

1. $\overline{\mathrm{v}} \parallel \overline{l} \Rightarrow \overline{\mathrm{v}} \cdot d\overline{l} = v\, dl$,
2. $v = \omega R$ (*заменяем линейную скорость на произведение угловой и радиуса*),
3. $\boldsymbol{S}$ – площадь круга, охватываемого контуром (*окружностью*) $\boldsymbol{l_1}$.

Можно заметить, что циркуляция в этом случае пропорциональна площади поверхности, натянутой на контур, по которому берётся интеграл и угловой скорости вращения.

Циркуляция характеризует вихревое движение по контуру вокруг некоторой оси.



а б в

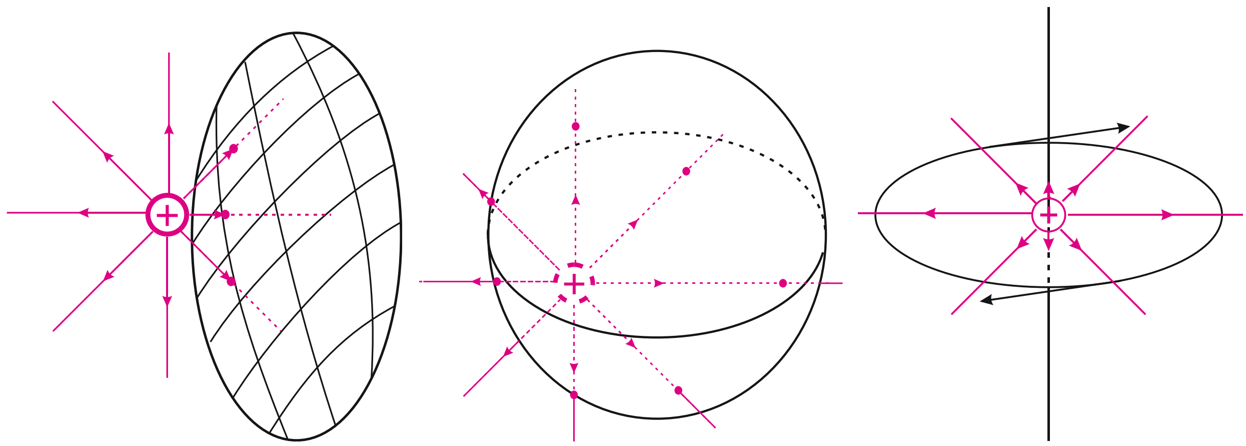
Рисунок 1.14

Однородное поле:

а. Поток– неравен нулю

б. Поток через замкнутую поверхность – равен нулю

в. Циркуляция – равна нулю



а б в

Рисунок 1.15

Центральное поле:

а. Поток– неравен нулю

б. Поток через замкнутую поверхность – неравен нулю

в. Циркуляция – равна нулю

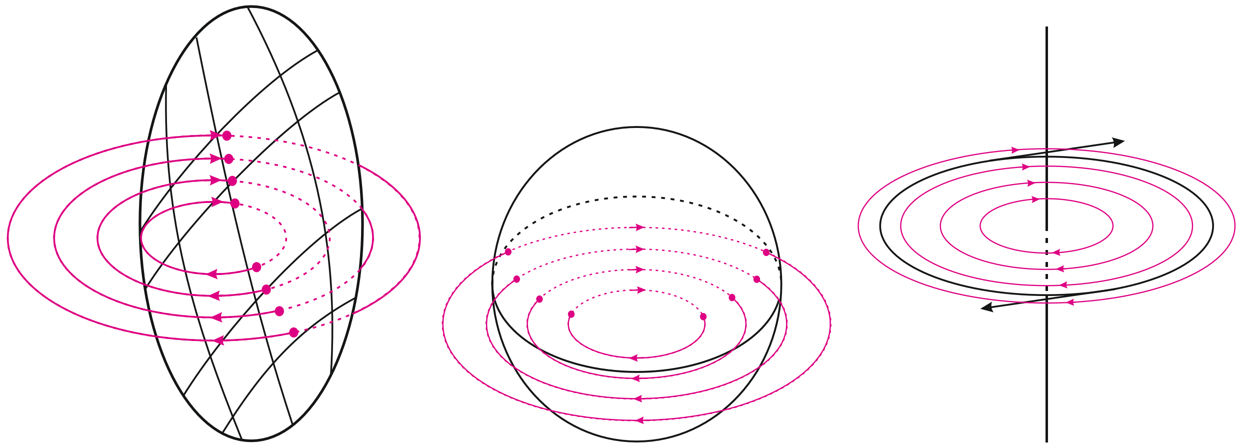


Рисунок 1.16
Вихревое поле:
а. Поток–равен нулю
б. Поток через замкнутую поверхность –равен нулю
в. Циркуляция – неравна нулю

На рисунках Рисунок 1.14, Рисунок 1.15, Рисунок 1.16 представлены различные варианты полей и их характеристики, рассмотренные в данном параграфе.

1.3.2. Дифференциальные операторы

Введём два линейных дифференциальных оператора:
Набла

$$\nabla = \frac{\partial ?}{\partial x}?\bar{i} + \frac{\partial ?}{\partial y}?\bar{j} + \frac{\partial ?}{\partial z}?\bar{k}, \qquad (1.22)$$

где «?» – пропущенная операция или вектор-функция.
И оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2 ?}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ?}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 ?}{\partial z^2}. \qquad (1.23)$$

Градиент скалярного поля *(в декартовых координатах):*

$$\operatorname{grad} \Phi = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\bar{k}. \qquad (1.24)$$

Это определение совпадает с определением *учебника Савельева*[4].

[4] Савельев И.В. Курс общей физики. В 5-ти т. Том 1. Механика — М,СПб: Лань, 2011. с 99, (3.31)

Более точно (*справочник Корна*[5]):

$$\operatorname{grad} \Phi \equiv \nabla \Phi = \lim_{V_1 \to 0} \frac{\oint\limits_{[S_1 \equiv \partial V_1]} \Phi \, d\overline{S}}{\int\limits_{V_1} dV}, \qquad (1.25)$$

S_1 – поверхность, ограничивающая [фигуру] V_1 (объемом V).

Градиент (**grad**) показывает скорость и направление наискорейшего роста функции.

Дивергенция векторного поля

$$\operatorname{div} \overline{A} \equiv \nabla \cdot \overline{A} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x} \cdot \overline{i} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial y} \cdot \overline{j} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial z} \cdot \overline{k}, \qquad (1.26)$$

$$\operatorname{div} \overline{A} \equiv \nabla \cdot \overline{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \overline{A} \cdot \overline{n} \, dS}{V}$$ (*учебник Савельева*[6]), (1.27)

$$\operatorname{div} \overline{A} \equiv \nabla \cdot \overline{A} = \lim_{V_1 \to 0} \frac{\oint\limits_{[S_1 \equiv \partial V_1]} \overline{A} \cdot d\overline{S}}{\int\limits_{V_1} dV}$$ (*справочник Корна*[7]). (1.28)

По физическому смыслу диверганция (div) показывает плотность источников поля.

Ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \overline{A} \equiv \nabla \times \overline{A} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x} \times \overline{i} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial y} \times \overline{j} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial z} \times \overline{k} = \qquad (1.29)$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Пусть контур l_1 ограничивает поверхность S_1. Тогда:

[5] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974., с.170, п. 5.5-1, (5.5-1)

[6] Савельев И.В. Курс общей физики. В 5-ти т. Том 2. Электричество и магнетизм — М,СПб: Лань, 2011. с 48, (1.79)

[7] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974., с. 171, п. 5.5-1, (5.5-2)

$$\left|\operatorname{rot} \overline{A}\right| = \left|\nabla \times \overline{A}\right| = \lim_{S_1 \to 0} \frac{\oint\limits_{[l_1 \equiv \partial S_1]} \overline{A} \cdot d\overline{l}}{S_1} \quad (\textit{учебник Савельева}^8) \qquad (1.30)$$

(*Это определение подходит, если угадали плоскость, в которой лежит контур*).

Более точно:

$$\operatorname{rot} \overline{A} = \nabla \times \overline{A} = \lim_{V_1 \to 0} \frac{\oint\limits_{[S_1 \equiv \partial V_1]} d\overline{S} \times \overline{A}}{\int\limits_{V_1} dV} \quad (\textit{справочник Корна}^9) \qquad (1.31)$$

По физическому смыслу rot показывает плотность завихрений, плотность вихревого характера поля.

Рассмотрим пример с циркуляцией векторного поля (*пример с* ***«водоворотом»****, рассмотренный выше*) и подставим в определение из учебника Савельева (в этом случае $\overline{F} \equiv \overline{\mathrm{v}}$):

$$\left|\operatorname{rot} \overline{\mathrm{v}}\right| = \lim_{S_1 \to 0} \frac{\oint\limits_{[l_1 \equiv \partial S_1]} \overline{\mathrm{v}} \cdot d\overline{l}}{S_1},$$

$$\oint\limits_{l_1} \overline{\mathrm{v}} \cdot d\overline{l} = 2\pi R^2 \omega,$$

$$S_1 = \pi R^2,$$

$$\left|\operatorname{rot} \overline{\mathrm{v}}\right| = \lim_{S_1 \to 0} \frac{\oint\limits_{[l_1 \equiv \partial S_1]} \overline{\mathrm{v}} \cdot d\overline{l}}{S_1} = \lim_{S_1 \to 0} \frac{2\cancel{\pi R^2}\,\omega}{\cancel{\pi R^2}} = 2\omega .$$

Таким образом, для нашего примера с потоком реки ***ротор*** будет равен угловой скорости вращения воды в этом потоке.

---

[8] Савельев И.В. Курс общей физики. В 5-ти т. Том 2. Электричество и магнетизм — М,СПб: Лань, 2011. с 55, (1.91)

[9] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974., с. с.171, п. 5.5-1, (5.5-3)

Плотность потока

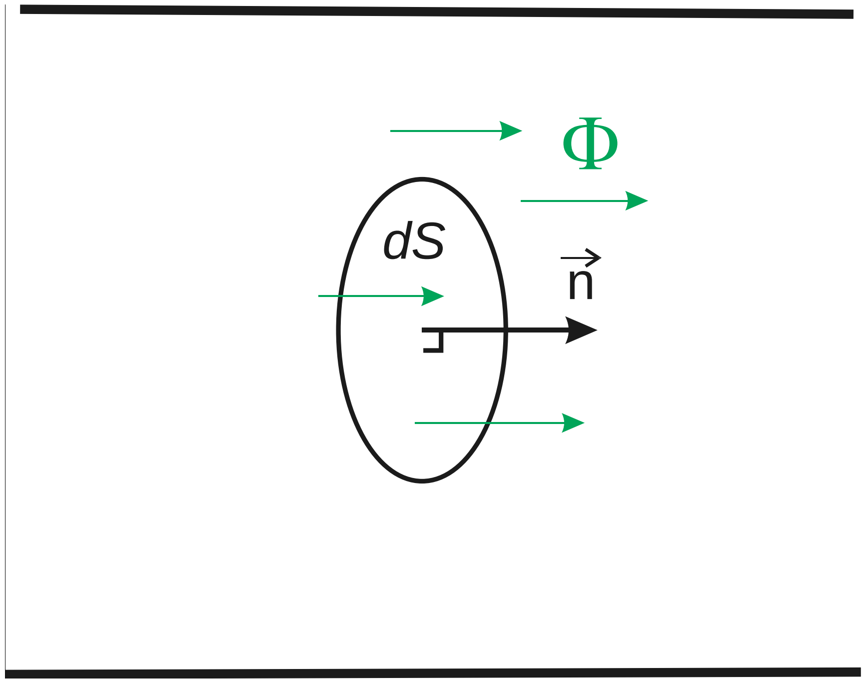


Рисунок 1.17
Плотность потока

Пусть Φ – поток векторного поля.
Тогда:

$$\bar{j} = \frac{\partial \Phi}{\partial S_{\perp}} \bar{n} \tag{1.32}$$

– вектор плотности потока для потока Φ.
И для него верно утверждение:

$$\Phi = \int_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} \tag{1.33}$$

$\bar{n}$ – единичный вектор, направленный в направлении движения потока

По смыслу и математически плотность потока будет являться тем водоворотом, от которого вычисляется поток.

Замечание. Отдельно отметим, что все приведённые операторы являются линейными, то есть отвечают аксиомам линейности. Как вывод из этого утверждения – мы можем их спокойно складывать, получая в результате суммарную характеристику суммы тех величин, что стояли у нас под оператором. *Сумма потоков напряжённостей системы зарядов равна потоку от напряжённости поля суммы этих зарядов*.

1.3.3. Теоремы математической теории поля

Th. Остроградского-Гауса: поток векторного поля через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

$$\oiint_{S_1} \overline{A} \cdot d\overline{S} = \iiint_{V_1} \operatorname{div} \overline{A}\, dV \quad . \tag{1.34}$$

Здесь $\boldsymbol{S_1}$ – граница $\boldsymbol{V_1}$: $S_1 = \partial V_1$

Th. Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля по некоторому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность ограниченную этим контуром.

$$\oint_{l_1} \overline{A} \cdot d\overline{l} = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \overline{A} \cdot d\overline{S} \tag{1.35}$$

Здесь $\boldsymbol{l_1}$- граница $\boldsymbol{S_1}$: $l_1 = \partial S_1$

Th. Обобщенная теорема Стокса.[10] Интеграл от коформы по границе равен интегралы от формы по когранице.

$$\int_V d\vec{\omega} = \int_{\partial V} \vec{\omega}$$

[10] Теорема приведена лишь для общей грамотности читателя и носит справочный характер.

1.4. Теорема Гаусса

Рассчитаем поток через замкнутую поверхность от одного точечного заряда – поток через поверхность сферы с центром в точке расположения заряда.

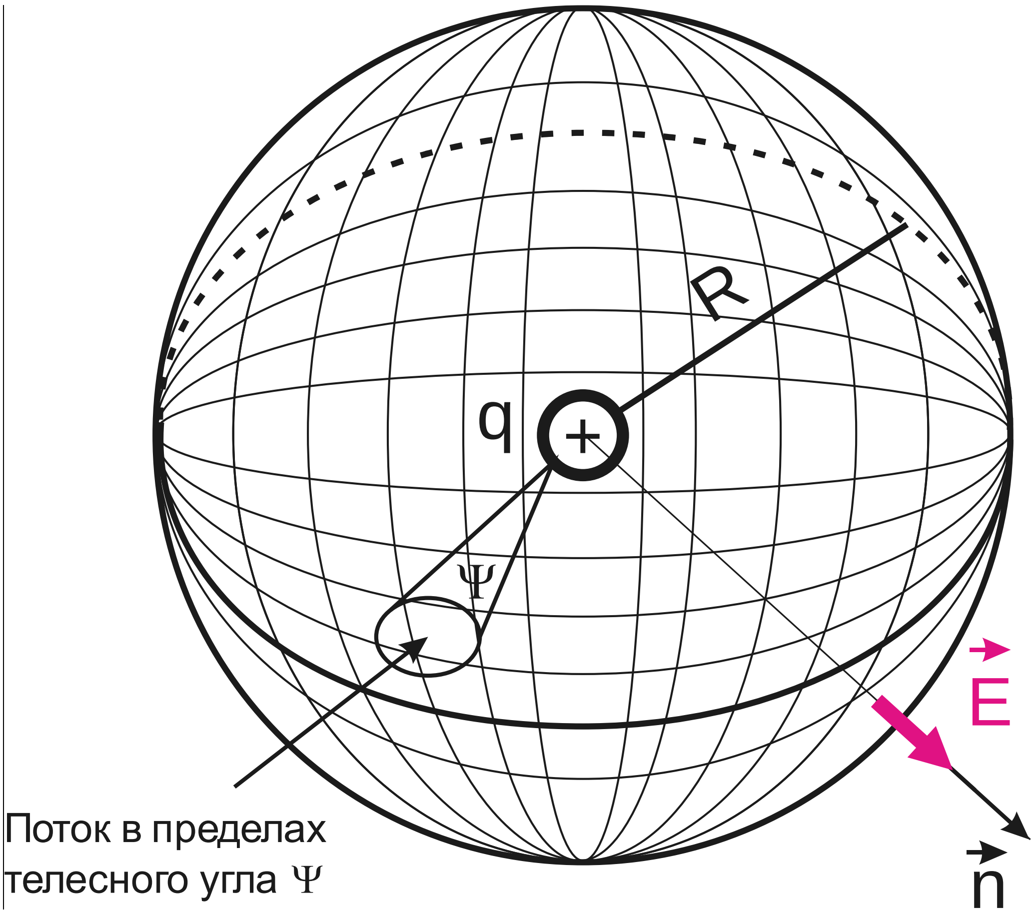


Рисунок 1.18

Поток поля точечного заряда

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\overline{e}_r$$

$$\Phi_E = \oint\limits_{S_1}\overline{E}\cdot d\overline{S} = \oint\limits_{S_1}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\underbrace{\overline{e}_r \cdot \overline{n}}_{1}\, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\oint\limits_{S_1} dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\oint\limits_{\Psi=4\pi} R^2\, d\Psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}\oint\limits_{\Psi=4\pi} d\Psi =$$

$$= \frac{q\cdot \cancel{4\pi}}{\cancel{4\pi}\,\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Таким образом, мы видим, что данный поток не зависит от радиуса сферы, а определяется только величиной заряда, расположенной внутри её.

Вообще, можно заметить, что поток напряжённости электростатического поля в пределах некоторого телесного угла будет определяться только величиной этого угла:

$$\Phi_{E(\Psi)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint\limits_{\Psi_1} d\Psi \;.$$

Отдельно можно ещё раз подчеркнуть, что поток также не будет зависеть и от формы поверхности, так как за счёт скалярного произведения напряжённости на вектор ориентированной поверхности, данное произведение можно представить, как произведение абсолютной величины вектора напряжённости на площадь поверхности, перпендикулярной вектору напряжённости:

$$\bar{E}\cdot d\bar{S} = \bar{E}\cdot\bar{n}\,dS = Ea\underbrace{b\cos\alpha}_{b\perp} = E\,dS_{\perp}$$

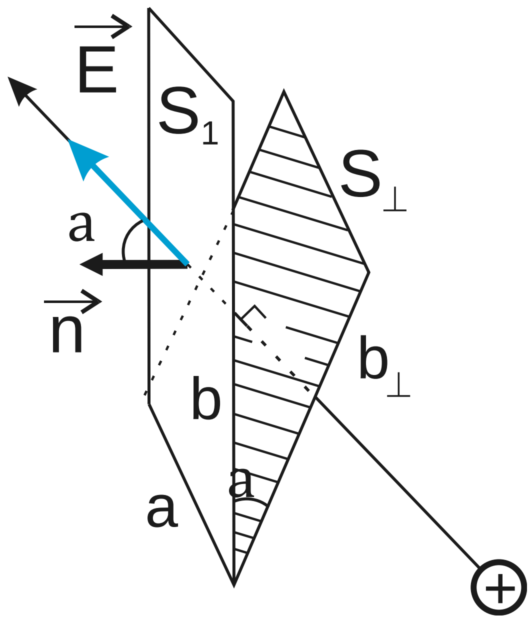


Рисунок 1.19
Поток через неперпендикулярную поверхность

$$d\Phi = \bar{E}\cdot d\bar{S} = E\,dS_{\perp}$$

Теперь рассмотрим случай, когда заряд не лежит внутри рассматриваемой замкнутой поверхности.

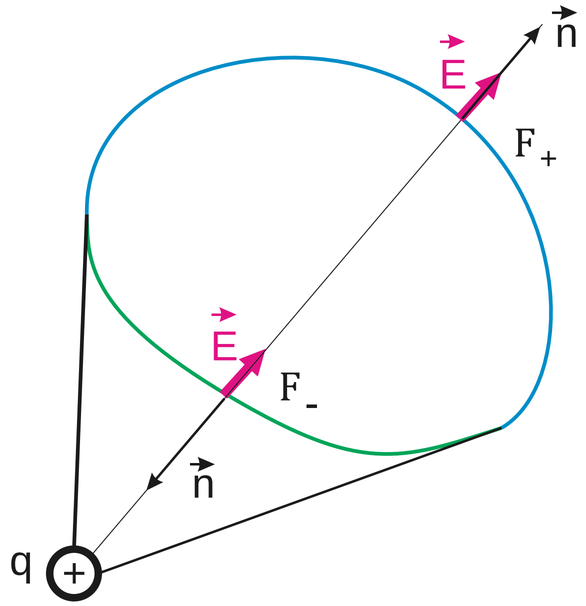


Рисунок 1.20
Поток через замкнутую поверхность

В этом случае, за счёт того, что и передняя и задняя часть замкнутой поверхности лежат в пределах одного и того же телесного угла, но поток через них отличается знаком, т.к. на входе нормаль противонаправлена ветору напряжённости, а на выходе сонаправлена с ним (*знаки минус и плюс, соответственно*), сумма этих двух потоков будет равна нулю. Таким образом, заряды, лежащие вне замкнутой поверхности не будут вность вклад в поток через неё.

$$\Phi_{-} : \bar{n} \uparrow\downarrow \bar{E} \Rightarrow \bar{E}\cdot\bar{n} = -E \Rightarrow \Phi_{-} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\Psi,$$

$$\Phi_{+} : \bar{n} \uparrow\uparrow \bar{E} \Rightarrow \bar{E}\cdot\bar{n} = E \Rightarrow \Phi_{+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\Psi.$$

$$\Phi = \Phi_{-} + \Phi_{+} = 0$$

Далее остаётся просуммировать потоки для всех зарядов, расположенных внутри данной замкнутой поверхности и получить теорему Гаусса для потока.

Th. Теорема Гаусса** (о потоке).** Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность пропорционален сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности:

$$\Phi_{\bar{E}} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i, \tag{1.36}$$

где

$$\Phi_{\bar{E}} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{S} \,. \qquad (1.37)$$

Либо, записывая всё одной строкой (*в этом случае не стоит забывать, что теорема заключается во втором знаке равенства, а первый знак равенства – определение потока векторного поля*):

$$\Phi_{\bar{E}} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \,. \qquad (1.38)$$

Подставляя определения вектора ориентированной поверхности и скалярного произведения на нормаль, как проекцию вектора на неё:

$$\oint \bar{E} \cdot \bar{n} \, dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \,, \qquad (1.39)$$

либо

$$\oint E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \,. \qquad (1.40)$$

Это уравнение есть ***4-е уравнение Максвелла*** *в интегральной форме*

Теорема Гаусса в дифференциальной форме.

Для распределённого заряда суммарный заряд равен интегралу по объёму от плотности заряда:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \iiint_{V_1} \rho dV \,.$$

С другой стороны, по теореме Остроградского-Гаусса поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу по объёму, ограниченному этой поверхностью, от его дивергенции:

$$\oiint_{S_1} \bar{E} \cdot d\bar{S} = \iiint_{V_1} \operatorname{div} \bar{E} \, dV \,.$$

Тогда, по теореме Гаусса имеем (подставим в формулу):

$$\iiint_{V_1} \operatorname{div} \bar{E} dV = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \iiint_{V_1} \rho dV \,,$$

$$\iiint_{V_1} \operatorname{div} \bar{E} dV = \iiint_{V_1} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho dV$$

Поскольку равенство интегралов не зависит от $\boldsymbol{V_1}$, подынтегральные выражения равны:

$$\forall V_1: \quad \iiint\limits_{V_1} \operatorname{div} \bar{E} dV = \iiint\limits_{V_1} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho dV \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \bar{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho$$

В итоге, получена ***теорема Гаусса в дифференциальной форме***. Дивергенция вектора напряжённости электрического поля в некоторой точке пропорциональна плотности заряда в рассматриваемой точке

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho \tag{1.41}$$

Графическая иллюстрация:

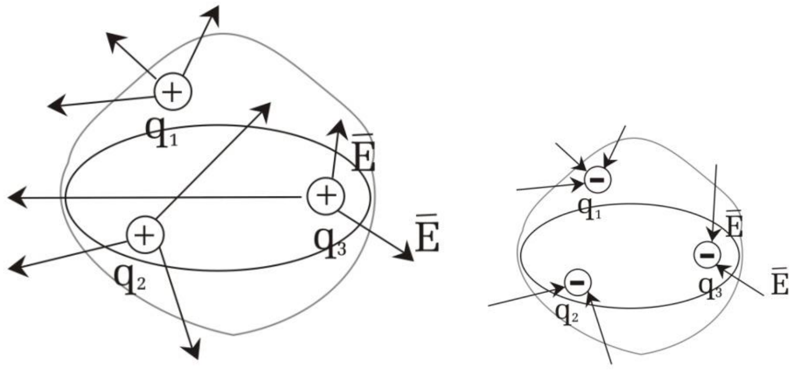


Рисунок 1.21
Графическая иллюстрация теоремы Гаусса

1.5. Применение теоремы Гаусса для простейших моделей

1.5.1. Поле бесконечной равномерно заряженной нити

Рассмотрим бесконечную равномерно заряженную нить с линейной плотностью заряда $\boldsymbol{\tau}$.

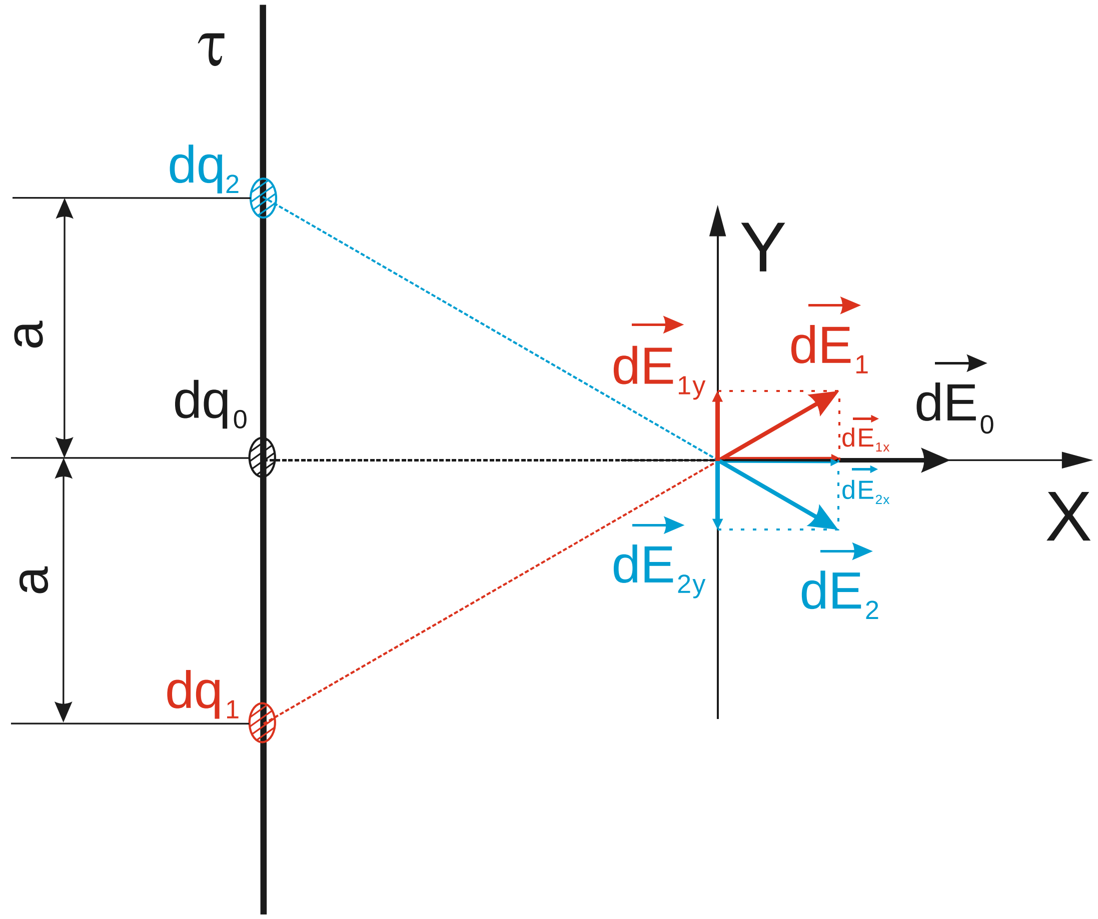


Рисунок 1.22
Поле бесконечной нити – симметрия поля

Рассмотрев рисунок, можно сделать следующие выводы:

1. Величина и абсолютное значение вектора напряжённости не будет зависеть от положения точки относительно нити (*смещения вверх или вниз*), а будет зависеть только от расстояния до нити – факт очевидный, поскольку смещаясь вверх или вниз, или крутясь вокруг нити, картина не изменяется ни сколько.
2. Вектор напряженности $\bar{E}$ перпендикулярен нити – для любого элементарного отрезка нити, дающего вклад в общую напряжённость, не перпендикулярную оси нити (*скажем, участок с зарядом* $\boldsymbol{q_1}$), найдётся симметричный участок (*участок с зарядом* $\boldsymbol{q_2}$), такой, что вклады напряжённостей, параллельные оси нити (*проекции на ось* ***OY***) взаимно уничтожатся.

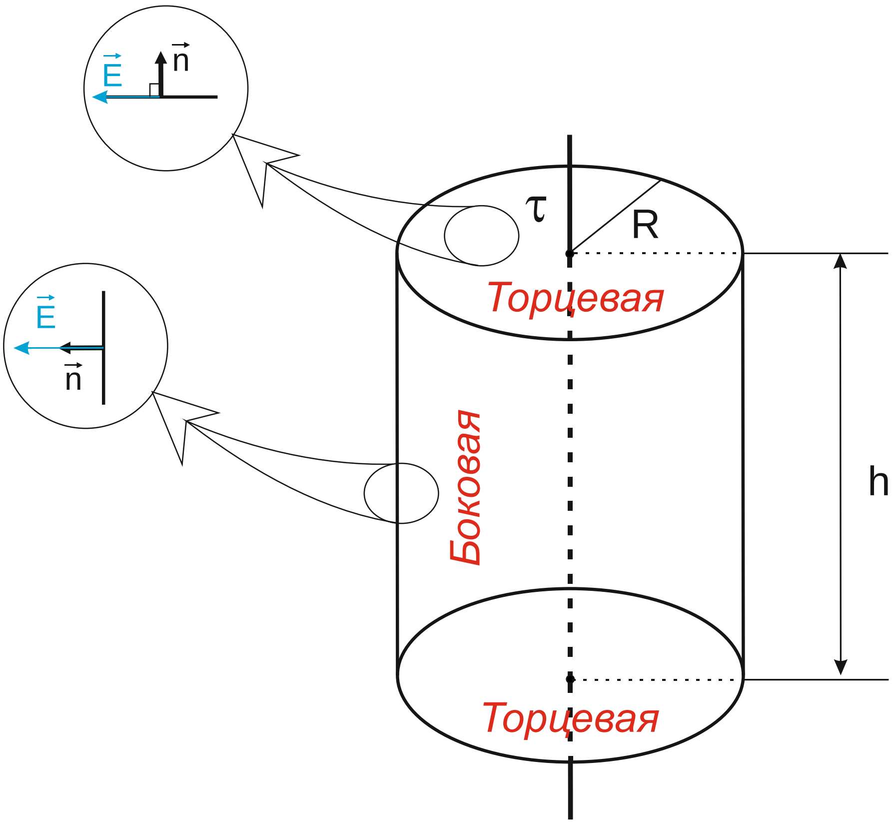


Рисунок 1.23
Поле бесконечной нити – поток

Рассмотрим ***Гауссову поверхность*** – замкнутую поверхность, по которой будем считать интеграл потока. В качестве такой поверхности возьмём цилиндр, радиуса ***R***, такой, чтобы нить проходила по его оси. Рассмотрим отдельно потоки вектора напряжённости через торцевую и боковую поверхности.

Поток вектора через торцевую поверхность будет равен нулю, так как вектор напряжённости перпендикулярен нормали к этой поверхности:

$$\bar{E} \perp \bar{n} \Rightarrow \bar{E} \cdot \bar{n} = 0 \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0 \Rightarrow \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\Phi_{торц.} = \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$$

Поток вектора напряжённости через боковую поверхность будет равен произведению абсолютного значения напряжённости на площадь этой поверхности:

$$\bar{E} \parallel \bar{n} \Rightarrow \bar{E} \cdot \bar{n} = E \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot dS$$

$$\bar{E} = const \Rightarrow \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot S$$

$$\Phi_{бок.} = \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot S = E \cdot \underbrace{2\pi R \cdot h}_{S_{Бок.}}$$

В итоге, сам поток через Гауссову поверхность будет равен:

$$\Phi = \Phi_{торц.} + \Phi_{бок.} = 0 + E \cdot 2\pi Rh = E \cdot 2\pi Rh.$$

С другой стороны заряд, расположенный внутри этой поверхности равен плотности заряда, умноженной на высоту цилиндра (*длина нити, расположенной внутри цилиндра равна его высоте*):

$$\sum q_i = \tau h$$

Тогда по теореме Гаусса имеем:

$$E \cdot 2\pi R \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \tau \cancel{h}$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\tau}{2\pi R}$$

Получили выражение для напряжённости бесконечной заряженной нити:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} \qquad (1.42)$$

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Рассмотрим бесконечную равномерно заряженную плоскость с поверхностной плотностью заряда $\boldsymbol{\sigma}$.

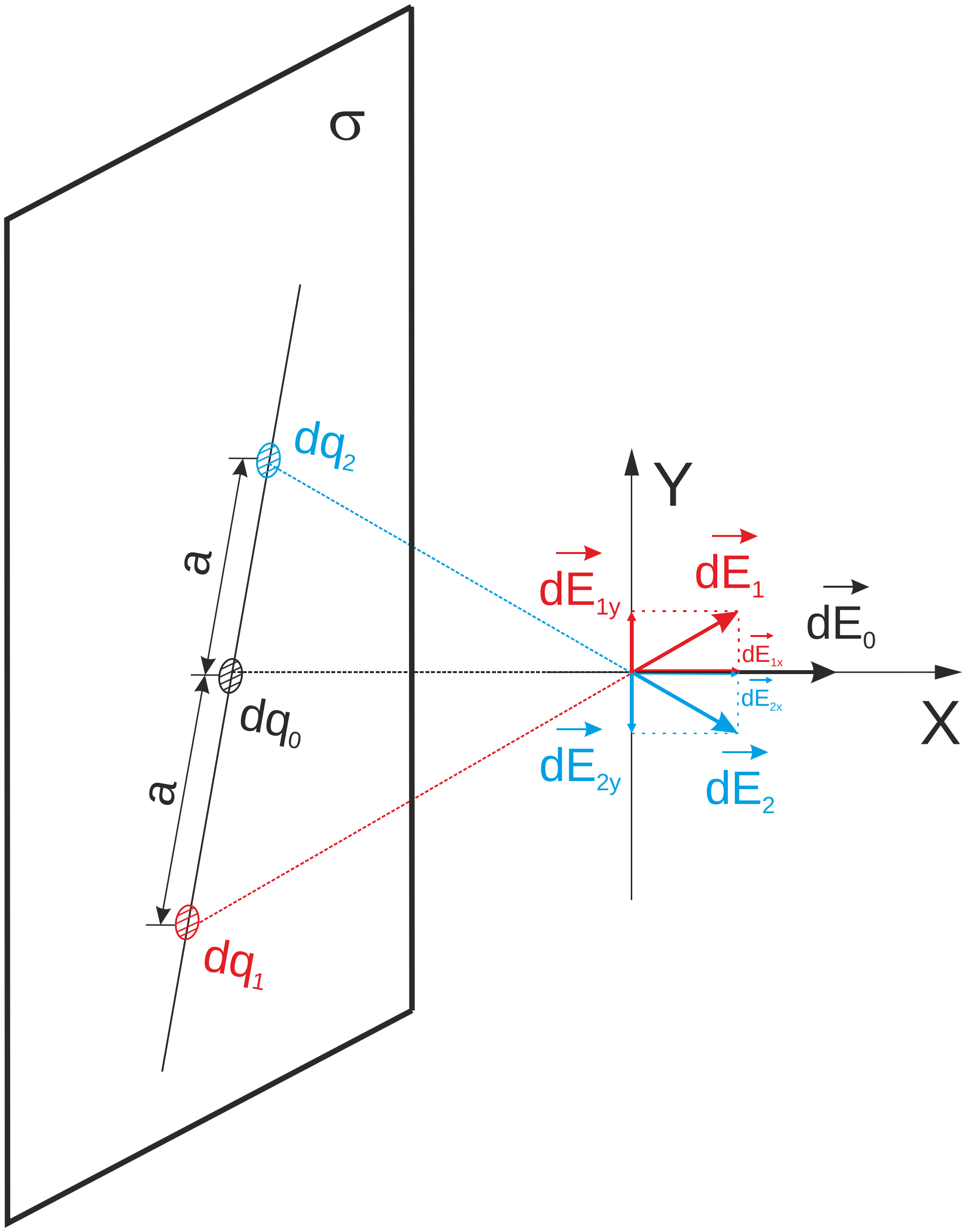


Рисунок 1.24
Поле бесконечной плоскости – симметрия поля

Как и в случаи с нитью, исходя из тех же предположений, можем сделать два утверждения:

1. Величина и абсолютное значение вектора напряжённости не будет зависеть от положения точки относительно плоскости (*смещения вверх,*

вниз, вправо или влево), а, возможно, может зависеть только от расстояния до нити.

2. Вектор напряженности $\bar{E}$ перпендикулярен плоскости.

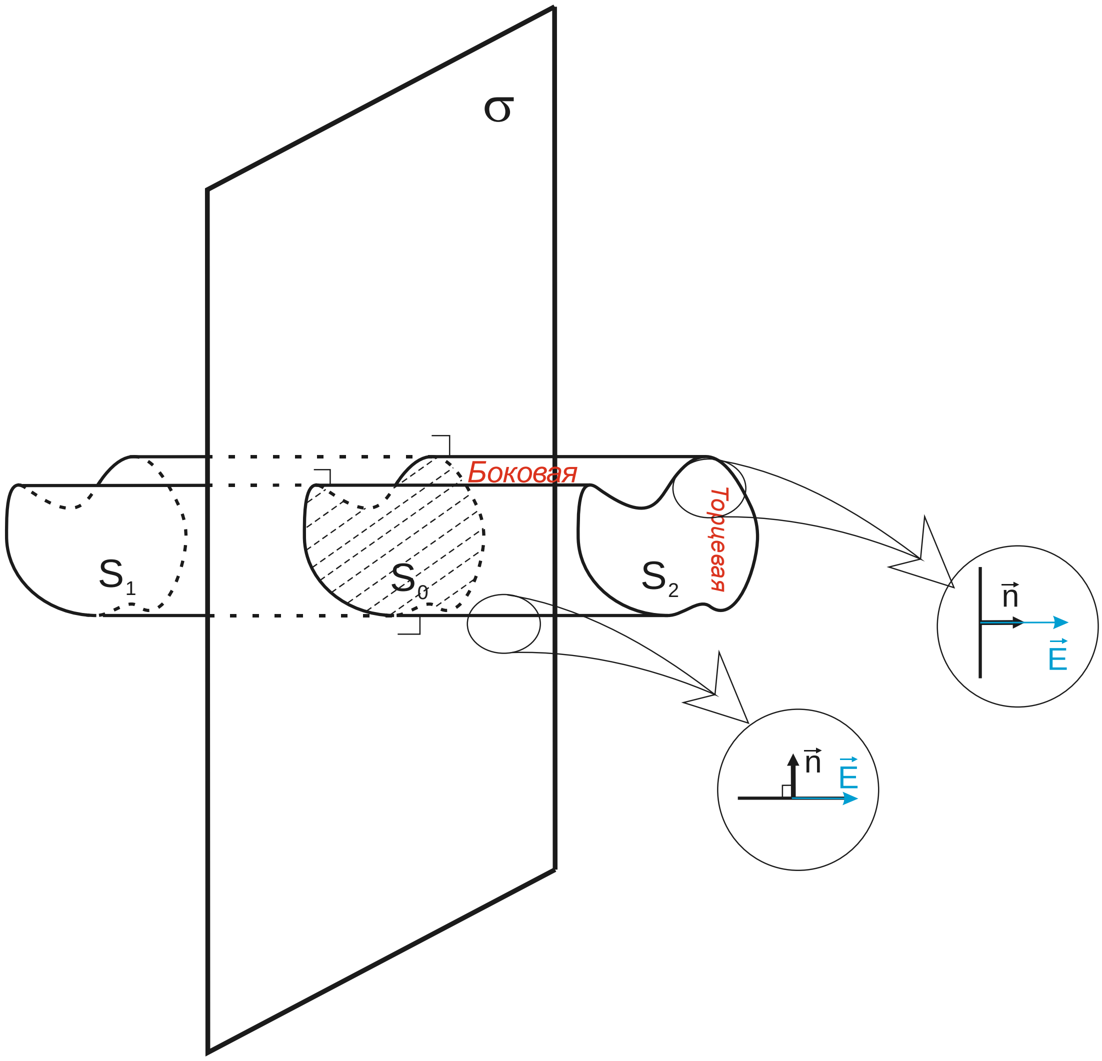


Рисунок 1.25

Поле бесконечной плоскости – поток

Возьмём в качестве Гауссовой поверхности цилиндр так, чтобы его боковая поверхность была перпендикулярна плоскости. В этом случае площади двух торцевых поверхностей, равные между собой, будут ещё и равны площади сечения цилиндра плоскостью:

$$S_1 = S_2 = S_0 = S$$

Поток вектора через боковую поверхность будет равен нулю, так как вектор напряжённости перпендикулярен нормали к этой поверхности:

$$\bar{E} \perp \bar{n} \Rightarrow \bar{E} \cdot \bar{n} = 0 \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0 \Rightarrow \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\Phi_{\text{бок.}} = \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$$

Поток вектора напряжённости через торцевую поверхность будет равен произведению абсолютного значения напряжённости на площадь этой поверхности:

$$\bar{E} \parallel \bar{n} \Rightarrow \bar{E} \cdot \bar{n} = E \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot dS$$

$$\bar{E} = const \Rightarrow \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot S$$

$$\Phi_{бок.} = \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot \left(S_1 + S_2 \right) = E \cdot \left(S + S \right) = E \cdot 2S$$

В итоге, сам поток через Гауссову поверхность будет равен:

$$\Phi = \Phi_{\text{бок.}} + \Phi_{торц.} = 0 + E \cdot 2S \,.$$

С другой стороны заряд, расположенный внутри этой поверхности равен поверхностной плотности заряда, умноженной на площадь сечения цилиндра плоскостью:

$$\sum q_i = \sigma S$$

Тогда по теореме Гаусса имеем:

$$E \cdot 2\cancel{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sigma \cancel{S}$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\sigma}{2}$$

Получили выражение для напряжённости электрического поля бесконечной заряженной нити:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \tag{1.43}$$

Надо отметить, что поле бесконечной заряженной плоскости является однородным полем – значение напряжённости не зависит от расстояния до плоскости и одинаково во всех точках. Конечно, в реальной жизни такого поля не существует, так как не существует бесконечных плоскостей. Но на практики, формула вполне подойдёт для расчёта напряжённости вблизи поверхности плоскости, когда расстояние до неё гораздо меньше её размеров.

1.5.2. Поле плоского конденсатора

Рассмотрим плоский конденсатор. В данном случае под плоским конденсатором будем понимать систему, состоящую из двух бесконечных равномерно заряженных плоскостей. Причём, эти плоскости имеют одинаковую по абсолютной величина и противоположную по знаку плотность заряда (*или заряд, если велики, но конечны*). Отметим, что, поскольку поле бесконечной плоскости однородно, вектора напряжённости, создаваемой той и другой плоскостью, будут равны по абсолютной величине во всех точках.

$$\left|\bar{E}_+\right| = \left|\bar{E}_-\right|$$

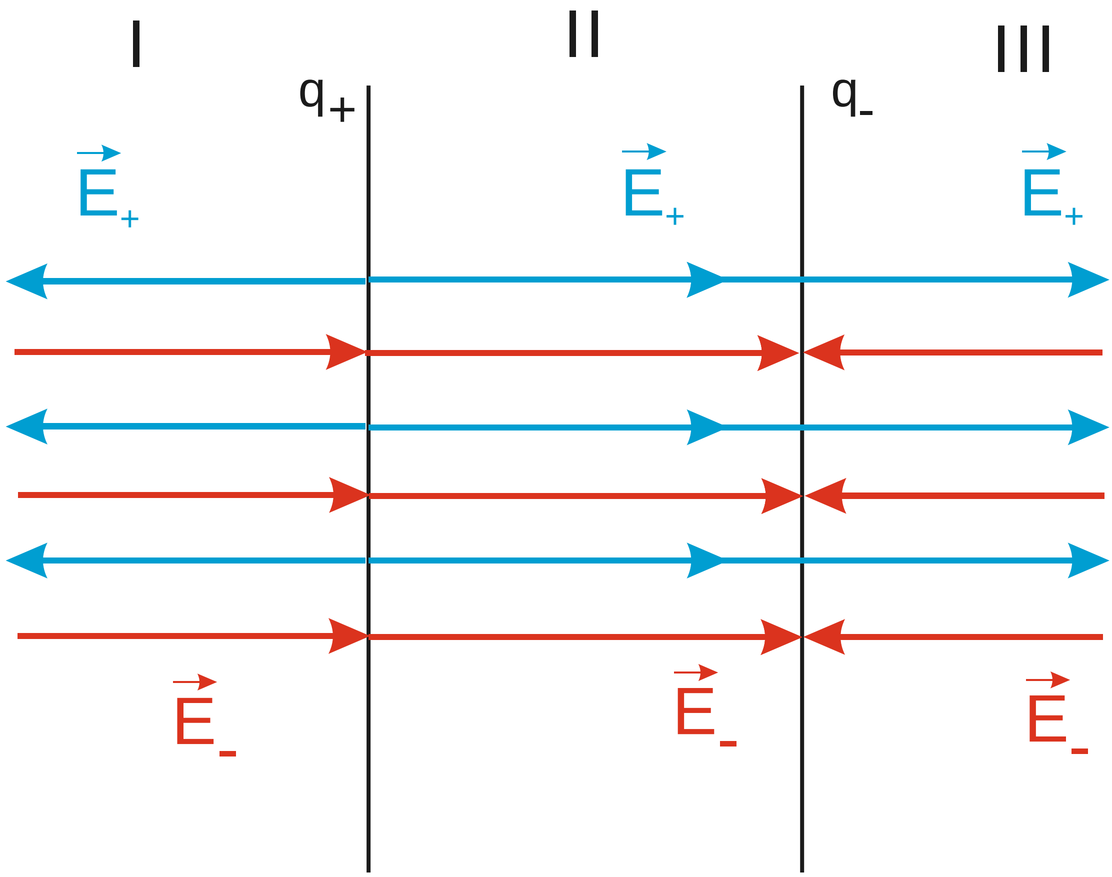


Рисунок 1.26
Поле бесконечного плоского конденсатора
(синие создаются «+», выходят из него, красные создаются «–», входят в него)

Для зон ***I*** и ***III*** вектора напряжённостей той и другой плоскости противонаправлены:

$$\bar{E}_+ \uparrow\downarrow \bar{E}_-$$

В итоге, результирующая напряжённость поля здесь будет равна нулю:

$$E = 0$$

Для зона ***II*** вектора напряжённостей той и другой плоскости сонаправлены:

$$\bar{E}_+ \uparrow\uparrow \bar{E}_-$$

Результирующая напряжённость будет равна их сумме:

$$E = 2E_{+} = \cancel{2}\frac{\sigma}{\cancel{2}\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (1.44)$$

1.5.3. Поле заряженной сферы и шара

Рассмотрим равномерно заряженную сферу (*неважно, из проводника или диэлектрика*) или заряженный шар из проводящего или непроводящего материала (*по отдельности*). Выберем в качестве Гауссовой поверхности сферу.

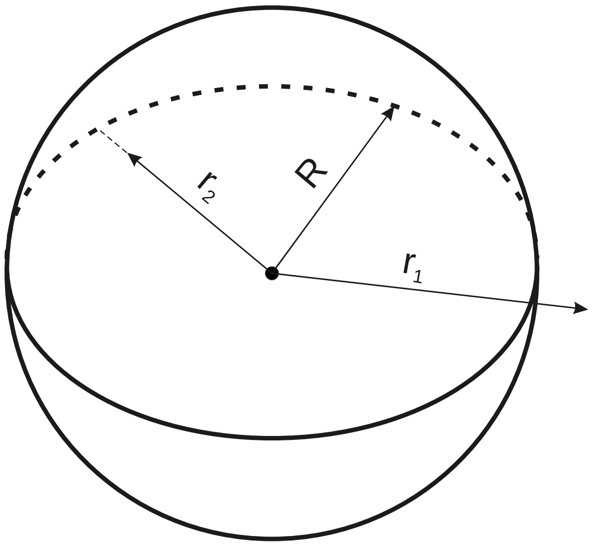


Рисунок 1.27
Поле сферы и шара

Всё из тех же соображений, что для, нити и плоскости можем сделать вывод, что напряжённость во всех точках направлена по радиусу, проведённому из центра, перпендикулярна поверхности сферы (*Гауссовой поверхности*), а поток можно рассчитать, как произведение площади сферы на напряжённость:

$$\bar{E} \uparrow\uparrow \bar{n} \Rightarrow \Phi = ES,$$

$$S = 4\pi r^2,$$

$$\Phi = ES = 4\pi r^2 E.$$

Для случая, когда радиус сферы, взятой в качестве Гауссовой поверхности, больше радиуса шара или сферы (***r*₁**), весь суммарный заряд будет находиться внутри неё:

$$\sum q_i = Q \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

В итоге имеем:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,. \tag{1.45}$$

Заряженная сфера или шар создают поле, эквивалентное полю точечного заряда, равного по величине суммарному заряду сферы или шара и расположенного в его центре.

В случае сферы из любого материала внутри сферы заряд отсутствует. Поэтому, если радиус сферы – гауссовой поверхности меньше её диаметра (***r*2**), заряд внутри поверхности равен нулю. Поскольку в случае заряженного шала из проводника все заряды будут также располагаться на его поверхности (*этот факт будет рассмотрен нами позже*), для него поле внутри тоже будет отсутствовать.

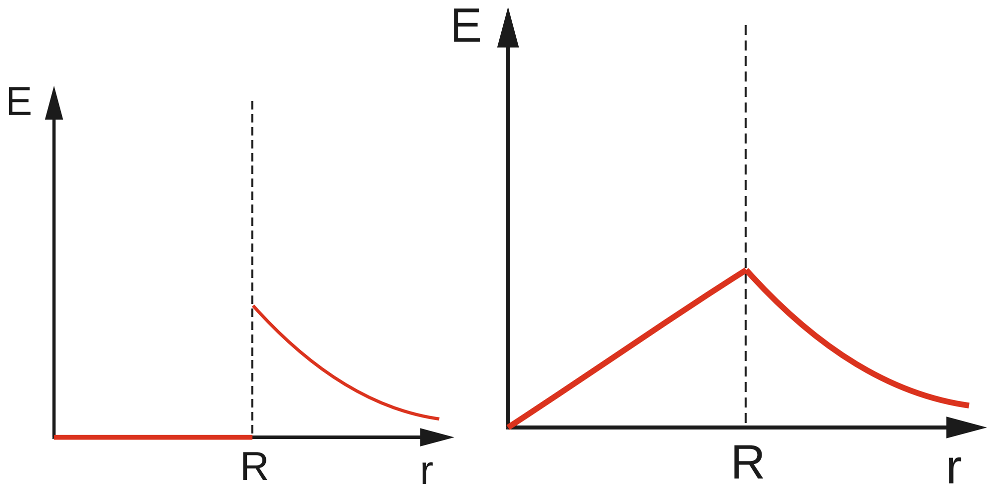
$$\sum q_i=0\Leftrightarrow E=0$$

Для равномерно заряженного шара из диэлектрика для сферы – Гауссовой поверхности с радиусом меньше её диаметра (***r*2**) суммарный заряд, расположенный внутри поверхности, будет равен объёму шара, умноженному на объёмную плотность заряда:

$$\sum q_i=\underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{V_{Сферы}}\cdot\delta\Rightarrow \cancel{4\pi}\,\cancel{r^2}E=\frac{\cancel{4\pi}r^{\cancel{3}}\delta}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$

Получаем окончательный результат:

$$E=\frac{r\delta}{3\varepsilon\varepsilon_0} \tag{1.46}$$



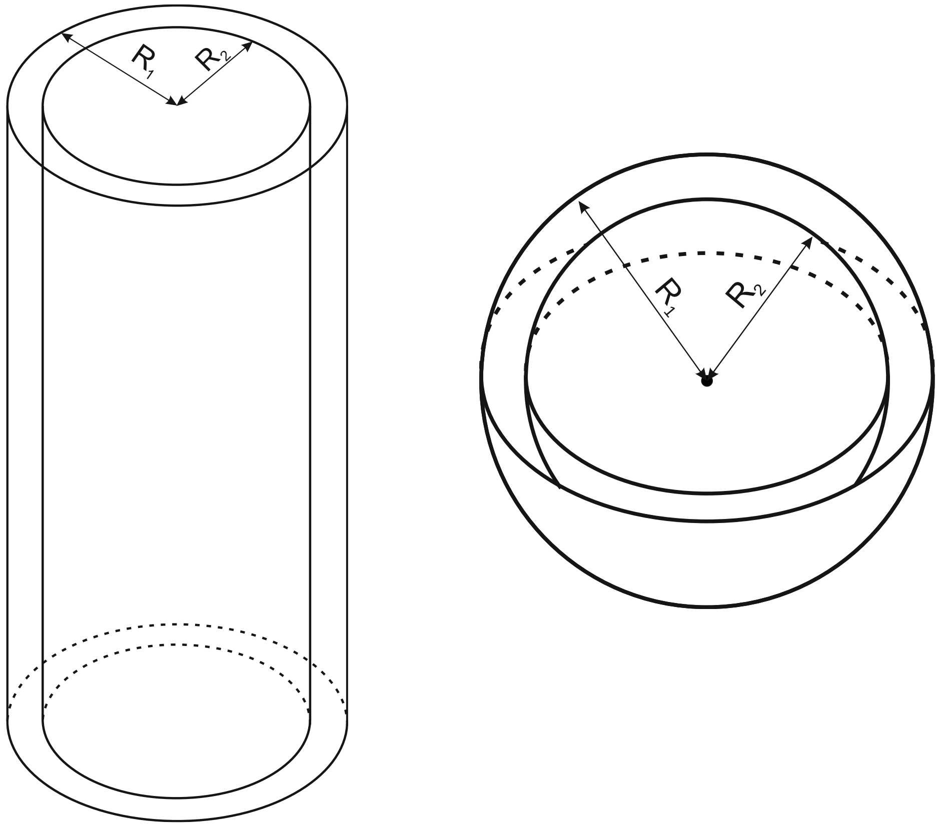
а **б**

Рисунок 1.28

Зависимость поля сферы и шара от расстояния.

а – Сфера, проводящий шар б –Непроводящий шар

1.5.4. Напряженность поля цилиндрического и сферического конденсатора



а б

Рисунок 1.29

а – Цилиндрический конденсатор б –Сферический конденсатор

Рассмотрим цилиндрический и сферический конденсаторы (вложенные друг в друга 2-а цилиндра с одной общей осью либо 2-е сферы с общим центром). Сначала рассмотрим один заряженный цилиндр (равномерно заряженный, бесконечно-длинный для удобства построения идеальной модели) точно также, как выше рассматривали заряженную сферу. Можно сделать следующие утверждения:

1 Напряжённость поля цилиндра будет направленно по нормали к поверхности цилиндра и не будет зависеть от сдвига вверх-вниз параллельно цилиндру. Это можно доказать точно также, как и для бесконечной равномерно заряженной сферы.

2 Поле внутри цилиндра отсутствует также, как и внутри сферу, причём по абсолютно тем же соображениям. Мы можем провести любую гауссову поверхность в виде цилиндра меньшего радиуса, чем наш, и тогда поток вектора индукции электростатического поля будет равен произведению площади боковой поверхности этого цилиндра (гауссовой поверхности) на абсолютную величину вектора напряжённости. В следствии того, что заряд внутри этой гауссовой поверхности 0 (весь заряд находится на поверхности заряженного цилиндра, а его радиус больше, рем радиус цилиндра - гауссовой поверхности).

3 Поле снаружи нашего цилиндра будет эквивалентно полю бесконечной заряженной нити, расположенной по оси цилиндра (формула (1.42), здесь τ – плотность заряда по высоте цилиндра). Вам предлагается самостоятельно повторить вывод этой формулы по образу и подобию вывода формулы напряжённости поля *бесконечной равномерно заряженной нити*.

Далее рассмотрим поле (*напряжённость электростатического поля*) *цилиндрического* и *сферического конденсаторов*. Внутри конденсатора (внутри внутренней обкладки того и другого конденсатора) поле будет отсутствовать. Это следует из того, что внутри как сферы, так и цилиндра, поле отсутствует (см. выше). Таким образом «внутри» внутренней обкладки, значит и «внутри» внешней обкладки – поля там точно нет! Снаружи конденсаторов поле будет отсутствовать по той же причине, что и для плоского конденсатора – поле одной из обкладок будет полностью гасить поле другой (они заряжены противоположными зарядами, следовательно, вектора напряжённости направленны в противоположную сторону. Напомним отдельно, что как для сферы, так и цилиндра, напряжённость поля зависит только от расстояния до центра или до оси, а не до самой обкладки. Следовательно, в одной и той же точки пространства снаружи конденсатора значения напряжённостей полей, создаваемых внешней и внутренней обкладками, будут равны (следовательно, погасят друг друга!).

Ну и наконец, между обкладками – поле внешней обкладки (и в том, и в другом случае) будет равно 0. Таким образом поле между обкладками цилиндрического и сферического конденсатора будет эквивалентно полю бесконечной равномерно заряженной нити и равномерно заряженной проводящей сферы.

И так. Для *цилиндрического* и *сферического конденсаторов* поле снаружи конденсатора и внутри внутренней обкладки будет отсутствовать (*будет равно 0*). Между обкладками же будет определяться соответственно формулой (1.42) для цилиндрического и формулой (1.45) для сферического конденсаторов.

1.6. Циркуляция и ротор напряжённости электростатического поля

Интегральная форма.

Рассмотрим циркуляция вектора напряжённости электрического поля:

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Заметим (*и это понадобится нам ещё не один раз*), что вектора $d\bar{l}$ и $d\bar{r}$ равны (*конкретнее, в точности совпадают*), так как первый есть элементарный (*то есть, бесконечно малый по длине*) вектор касательной и направлен по касательной к кривой, задавая на ней направление, а второй – элементарный (*то есть, бесконечно малый по длине*) вектор перемещения, направленный по касательной к траектории, которой и является данная кривая. Таким образом, вектора равны по длине и направлению:

$$d\bar{l} = d\bar{r} \,.$$

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{r}$$

А теперь подставим в формулу вместо вектора напряжённости его выражение через силу (*по определению*):

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q}$$

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{r} = \oint_{l_1} \frac{\bar{F}}{q} \cdot d\bar{r}.$$

А затем вынесем величину заряда за интеграл, как постоянную, не зависящую от переменной интегрирования:

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \oint_{l_1} \frac{\bar{F}}{q} \cdot d\bar{l} = \frac{1}{q} \oint_{l_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Но выражение, стоящее под последним интегралом есть элементарная работа:

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{1}{q} \oint_{l_1} \underbrace{\bar{F} \cdot d\bar{r}}_{dA} = \frac{1}{q} \oint_{l_1} dA.$$

Но, поскольку электростатическое поле консервативно, работа по любому замкнутому контуру будет равна нулю:

$$\frac{1}{q} \oint_{l_1} dA = 0$$

Т.о. циркуляция вектора напряженности *электростатического* поля $\bar{E}$ равна нулю:

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0. \tag{1.47}$$

Отметим отдельно, что утверждение верно только для электростатического поля. В уравнениях Максвелла сюда добавится ещё и электроиндукционная составляющая.

Дифференциальная форма.

По теореме Стокса

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \bar{E} \cdot d\bar{S}.$$

Где $\boldsymbol{S_1}$ – поверхность, ограниченная контуром $\boldsymbol{l_1}$.

Равенство нулю циркуляции влечёт за собой равенство нулю ротора напряжённости электростатического поля:

$$\forall S_1 : \quad \int_{S_1} \operatorname{rot} \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0.$$

Т.о. *ротор* напряженности *электростатического* поля $\bar{E}$ равен нулю:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0. \tag{1.48}$$

1.7. Диполь. Электрический момент диполя

1.7.1. Поле диполя

Df. Систему из *заряженных частиц,* с равными по абсолютной величине и противоположными по знаку зарядами, разнесенных на некоторое расстояние называется ***электрическим диполем***.

Замечание: диполь является электронейтральной системой, т.е. суммарный заряд диполя равен нулю. Однако напряженность поля, создаваемая диполем, равна нулю.

$$|q_+| = |q_-| = q$$

$$q_+ > 0$$

$$q_- < 0$$

$$Q = \sum_{i=1}^{q} q_i = q_+ + q_- = 0$$

$$\bar{E} \neq 0$$

По правилу суперпозиции

$$\bar{E} = \bar{E}_+ + \bar{E}_-$$

Для характеристики диполей используется величина, называемая **электрическим моментом**

Df: Электрический момент (*дипольный момент – устар.*) – это векторная величина, равная произведению абсолютной величины одного из зарядов на вектор, направленный от отрицательного к положительному заряду:

$$\bar{p} = q\bar{l} \tag{1.49}$$

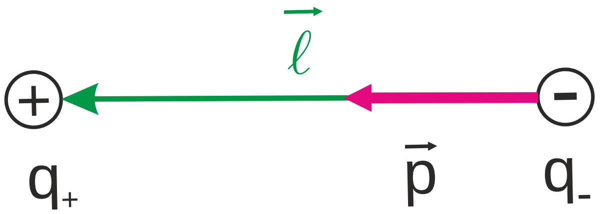


Рисунок 1.30

Электрический (дипольный) момент – определение

Измеряется в *кулонах, умноженных на метр*, $[Кл \cdot м] = [Кл][м]$.

Рассмотрим потенциал, создаваемый диполем в некоторой точке для точечного заряда.

Для точечного заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Для системы зарядов

$$\varphi = \sum \varphi_i$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_+}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_-}{r_-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_+}{r_+} + \frac{q_-}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} q = q_+ = \left|q_-\right| \\ q = -q_-(т.к. q > 0, q_- < 0) \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left|r_- - r_+\right| \simeq \overline{l} \cdot \overline{e}_{r_-} \\ \overline{l} = \overline{r}_- - \overline{r}_+ \\ \left|\overline{e}_r\right| = 1 \\ r_+ \cdot r_- \simeq r^2 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\overline{l} \cdot \overline{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overline{p} \cdot \overline{e}_r}{r^2}.$$

Здесь:

$\overline{r}$ – радиус-вектор, проведенный от середины радиус-вектор,

$\overline{p}$ – электрический момент диполя (*дипольный момент*).

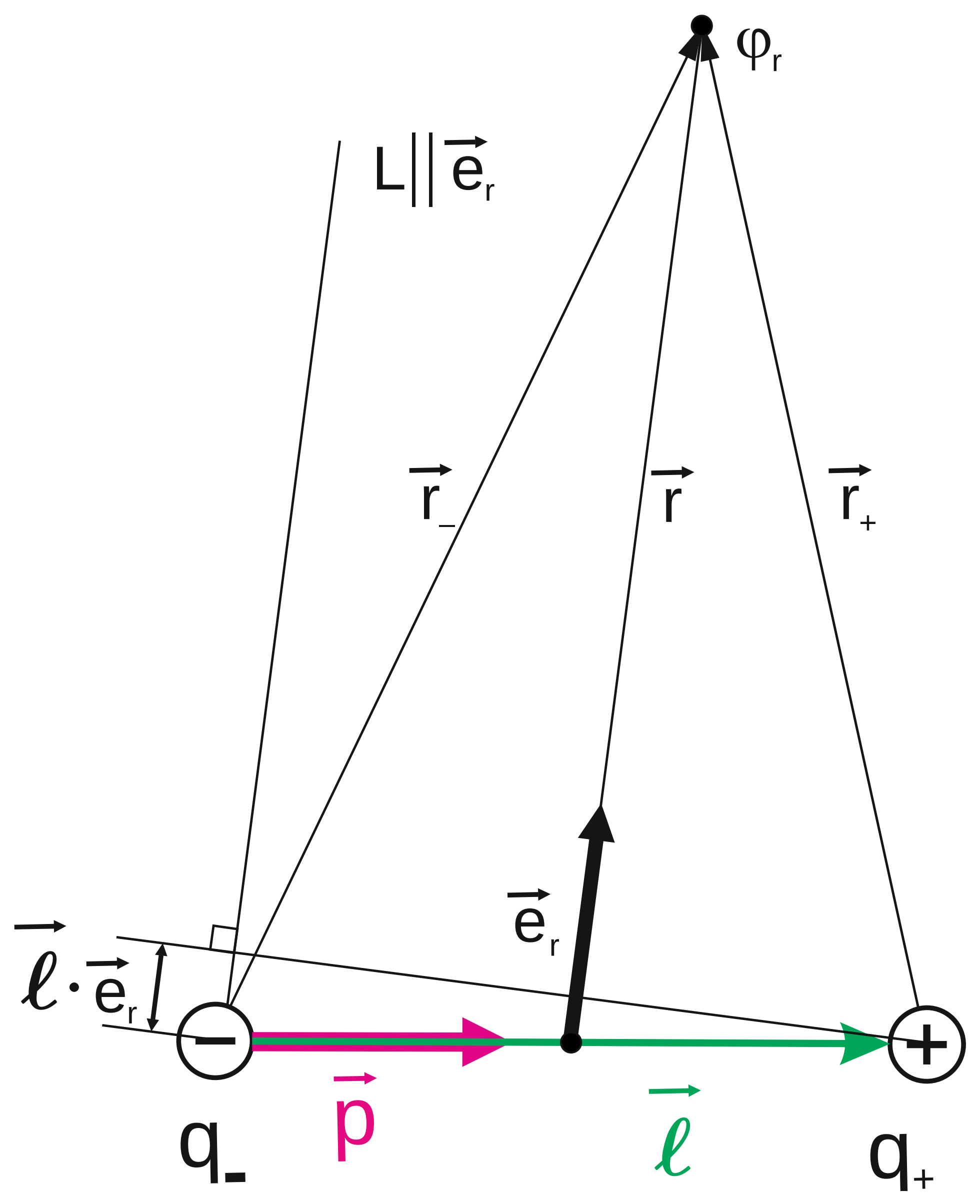


Рисунок 1.31
Электрический (*дипольный*) момент и вектора, используемые в модели

Окончательно:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overline{p}\cdot\overline{e}_r}{r^2} \qquad (1.50)$$

r – расстояние от диполя до точки

$\overline{e}_r$ - единичный вектор от диполя на рассматриваемую точку.

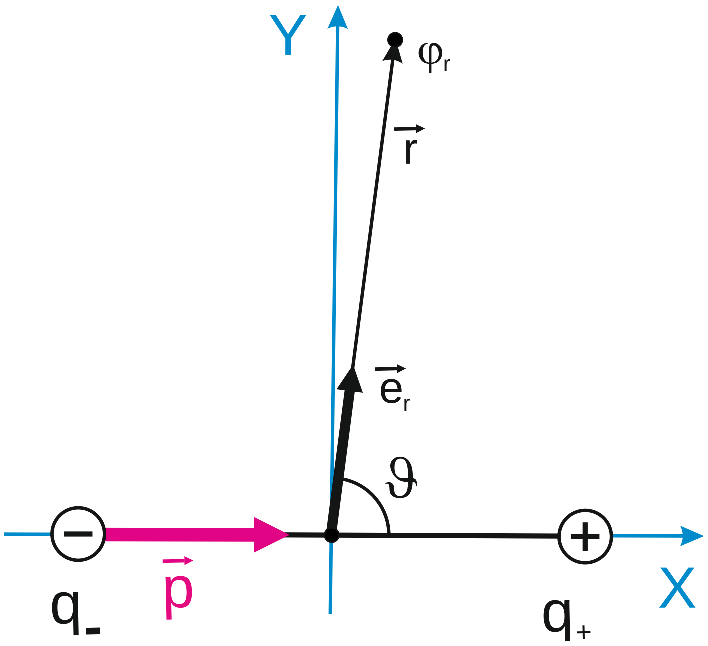


Рисунок 1.32
Диполь в декартовых координатах

Вычислим вектор напряженности поля диполя, рассчитав его градиент в точке. Как мы только что показали, потенциал поля диполя, как функция радиус-вектора, выглядит следующим образом:

$$\varphi(\bar{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_r}{\boldsymbol{r}^2}.$$

В учебниках Савельева и Иродова предлагается брать градиент этой функции в полярных координатах. Для разнообразия, вычислим градиент в декартовых координатах (Рисунок 1.32). Ну, скажем, хотя бы для того, чтобы показать, что результат на зависит от способа его вычисления 😊.

В координатной форме в декартовой системе координат радиус-вектор задаётся, как

$$\bar{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Тогда его длина (модуль величина)

$$\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2,$$

косинус и синус угла между радиус вектором и осью X (он же угол между дипольным моментом $\bar{\boldsymbol{p}}$ и единичным вектором направление $\bar{\boldsymbol{e}}_r$)

$$\cos\vartheta = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}},$$

$$\sin\vartheta = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}}.$$

Тогда скалярное произведение можно выразить, как

$$\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p} \cos \vartheta = \boldsymbol{p} \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}} .$$

В итоге, потенциал в координатной форме запишется в виде следующей формулы:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2} \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{x}}{\left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0} \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

где

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

И так, вычислим градиент этой функции в декартовой системе координат. Для простоты будем рассчитывать градиент функции $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, так как множитель перед ней есть постоянная величина и может быть вынесен за знак производной.

Производная по $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}}{\left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\left[\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\mathbf{v} - \boldsymbol{u}\mathbf{v}'}{\mathbf{v}^2}, \quad \left(\boldsymbol{f}^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \boldsymbol{f}^{\frac{3}{2}-1} \right]$$

$$= \frac{1 \cdot \left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}} - \boldsymbol{x} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}-1} \cdot \cancel{2}\boldsymbol{x}}{\left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}\cdot 2}} =$$

$$= \frac{\left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3\boldsymbol{x}^2 \left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{6}{2}}} =$$

$$=\frac{\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{2}{2}}-3x^2\right)\cancel{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(x^2+y^2\right)^{\cancel{\frac{6}{2}}\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+y^2-\cancel{3}^{2}x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}=$$

$$=\frac{y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}}=\frac{y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{y^2-2x^2}{\underbrace{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}_{r}^{3}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{r^3}\left(\left(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\sin\vartheta}\right)^2-\left(\underbrace{\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos\vartheta}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{\sin^2\vartheta-2\cos^2\vartheta}{r^3}.$$

В итоге имеем:

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}=\frac{\sin^2\vartheta-2\cos^2\vartheta}{r^3}$$

Производная по y:

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\left[\left(f^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{3}{2}f^{-\frac{3}{2}-1}\cdot f'\right]$$

$$=\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}\cdot\cancel{2}y=\frac{3xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}=$$

$$
=\frac{3\boldsymbol{xy}}{\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}=
$$

$$
=\frac{3\boldsymbol{xy}}{\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}}=
$$

$$
=\frac{3}{\left(\underbrace{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}}_{\boldsymbol{r}}\right)^3}\cdot\underbrace{\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}}}_{\cos\vartheta}\cdot\underbrace{\frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}}}_{\sin\vartheta}=
$$

$$
=\frac{3\cos\vartheta\sin\vartheta}{\boldsymbol{r}^3}.
$$

Имеем:

$$
\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{3\cos\vartheta\sin\vartheta}{\boldsymbol{r}^3}.
$$

Теперь запишем сам вектор напряжённости поля диполя в расчётной точке

$$
\bar{\boldsymbol{E}}=-\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{y}}\bar{\boldsymbol{j}}\right),
$$

$$
\bar{\boldsymbol{E}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\left(\left(\sin^2\vartheta-2\cos^2\vartheta\right)\bar{\boldsymbol{i}}+3\cos\vartheta\sin\vartheta\,\bar{\boldsymbol{j}}\right),
$$

Вычислим его абсолютное значение и для этого сначала рассчитаем скалярный квадрат этого вектора:

$$
\boldsymbol{E}^2=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\left(\left(\sin^2\vartheta-2\cos^2\vartheta\right)^2+\left(3\cos\vartheta\sin\vartheta\right)^2\right)=
$$

$$
=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\cdot
$$

$$
\cdot\left(\left(\sin^2\vartheta\right)^2+4\left(\cos^2\vartheta\right)^2-\cancel{4\cdot\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}+\cancel{9}^{\,5}\cdot\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\right)=
$$

$$
=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\cdot
$$

$$
\cdot\left(\left(\sin^2\vartheta\right)^2+\left(\cos^2\vartheta\right)^2+2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta+3\left(\cos^2\vartheta\right)^2+3\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\right)=
$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\left(\left(\underbrace{\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta}_{1}\right)^2+3\cos^2\vartheta\left(\underbrace{\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}_{1}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\left(1+3\cos^2\vartheta\right).$$

Тогда само абсолютное значение напряжённости будет задаваться следующем выражением:

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$$

Как мы уже сказали, в учебниках (Савельев, Иродов) расчёт ведётся несколько иначе. И там, и там градиент рассчитывается в полярных координатах:

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{r}}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}\cos\vartheta}{\boldsymbol{r}^3},$$

$$\boldsymbol{E}_{\vartheta}=-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\sin\vartheta}{\boldsymbol{r}^3},$$

$$\bar{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{r}}\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{E}_{\vartheta}\bar{\boldsymbol{e}}_{\vartheta}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\left(\cos\vartheta\,\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}+\sin\vartheta\,\bar{\boldsymbol{e}}_{\vartheta}\right)/$$

Абсолютное значение напряжённости:

$$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{r}}^2+\boldsymbol{E}_{\vartheta}^2$$

$$\boldsymbol{E}^2=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\left(\left(2\cos\vartheta\right)^2+\left(\sin\vartheta\right)^2\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\left(4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\left(3\cos^2\vartheta+\underbrace{\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}_{1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right)^2\left(1+3\cos^2\vartheta\right)$$

Как мы видим, значения полностью совпали!

Используя полученную формулу, можно показать, что для диполя будут справедливы следующие выражения:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \qquad (1.51)$$

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \qquad (1.52)$$

$E_{\parallel}$ – вектор напряженности поля диполя на оси симметрии диполя,

$E_{\perp}$ – вектор напряженности поля диполя на оси, перпендикулярной оси симметрии диполя.

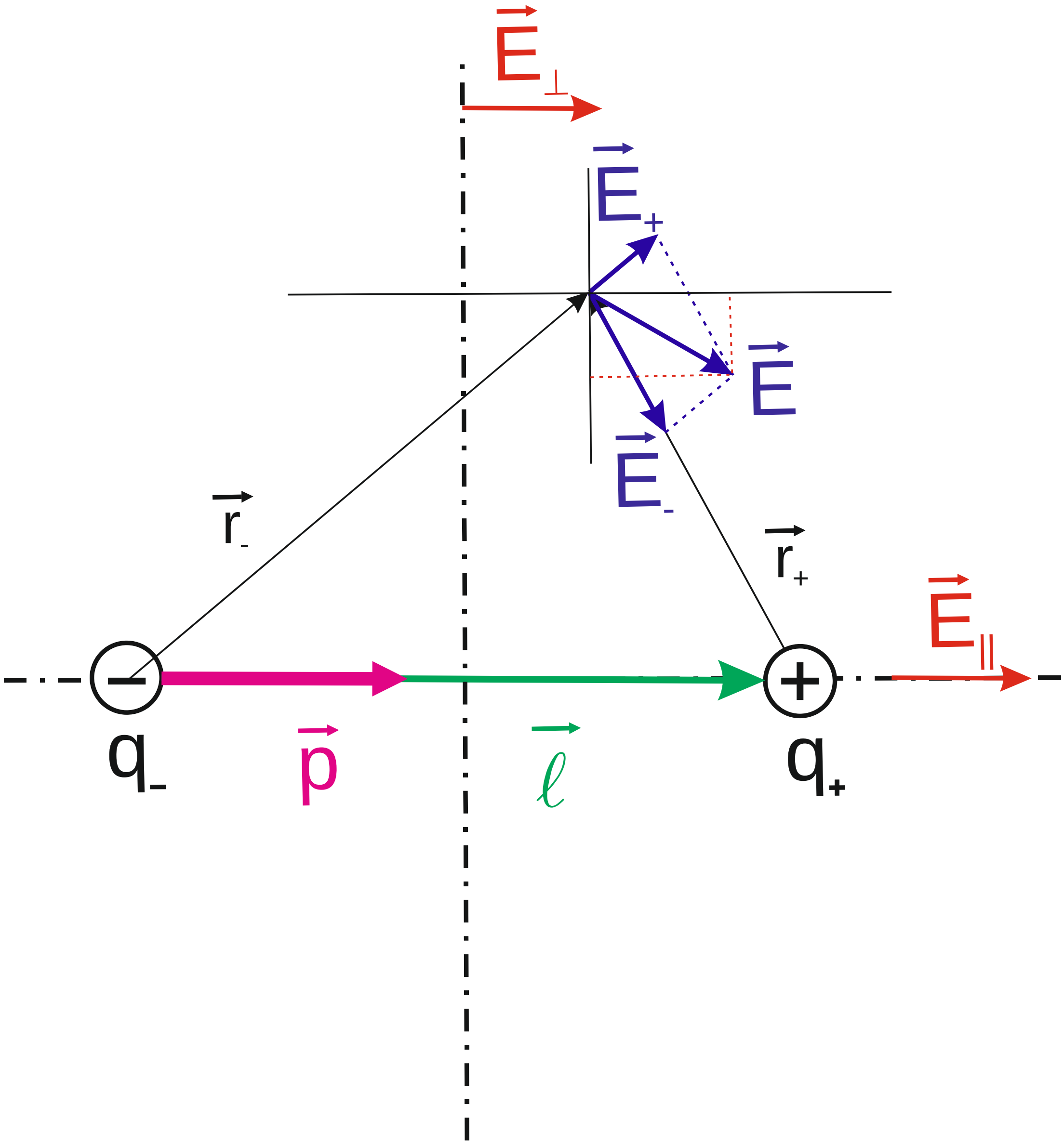


Рисунок 1.33
Напряжённость поля диполя

Формулы (1.51) и (1.52) можно получить и более простым способом, используя закон Кулона, а точнее, принцип суперпозиции и формулу напряжённости поля точеного заряда, полученную из закона Кулона. Приведём и эти два вывода тоже.

Поле на оси диполя:

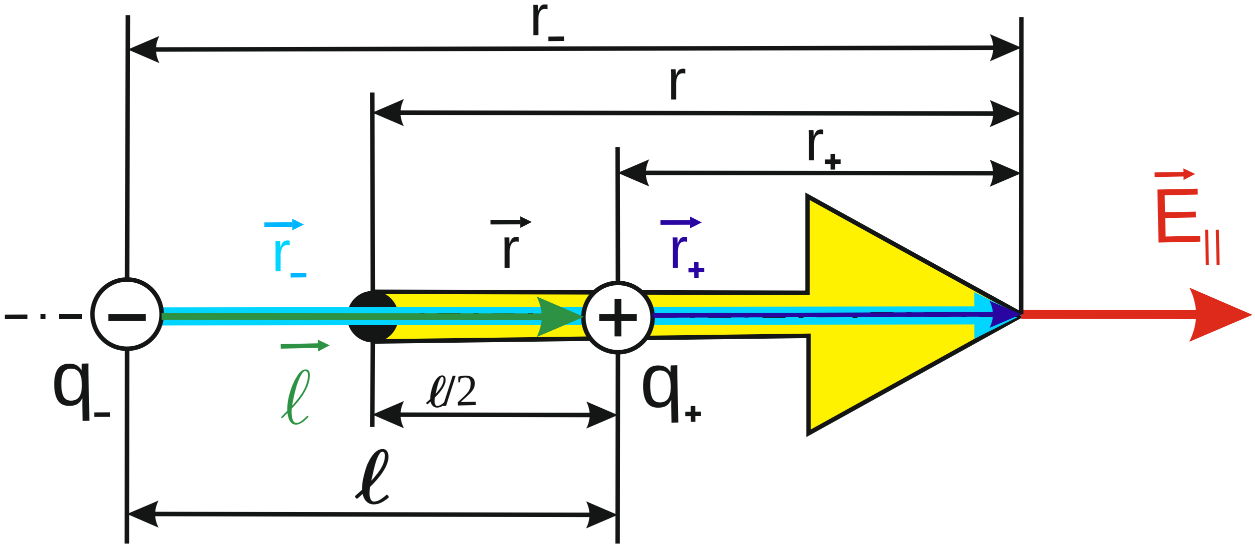


Рисунок 1.34
Поле на оси диполя

Сначала напомним, что оба заряды равны по величине и противоположны по знаку

$$q_+ = q\,,$$
$$q_- = -q\,.$$

Радиус-вектора от отрицательного и положительного зарядов равны радиус-векторы от центра диполя до рассматриваемой точки плюс иминус половина плеча диполя:

$$\bar{r}_+ = \bar{r} - \frac{1}{2}\bar{l}\,,$$
$$\bar{r}_- = \bar{r} + \frac{1}{2}\bar{l}\,.$$

Или по абсолютной величине:

$$r_+ = r - \frac{1}{2}l\,,$$
$$r_- = r + \frac{1}{2}l\,.$$

Учтём, что напряжённость поля точечного заряда определяется формулой

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\bar{e}_r\,,$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

и то, что общая напряжённость поля будет равна сумме напряжённостей положительного и отрицательного зарядов диполя:

$$\bar{E}_{\parallel}=\bar{E}_{+}+\bar{E}_{-}.$$

Поскольку оба вектора направлены параллельно (то, что они противоположны по направлению, будет учтено при подстановке величины зарядов – один заряд положительный, а другой отрицательный), великана результирующей напряжённости будет равна алгебраической суммы абсолютных значений напряжённостей, создаваемых обеими зарядами. Преобразуем полученное выражение:

$$E_{\parallel}=E_{+}+E_{-}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{+}}{r_{+}^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{-}}{r_{-}^2}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{+}^2}+\frac{-q}{r_{-}^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{+}^2}-\frac{q}{r_{-}^2}\right)=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(r-\frac{1}{2}l\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{1}{2}l\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(r+\frac{1}{2}l\right)^2-\left(r-\frac{1}{2}l\right)^2}{\left(r-\frac{1}{2}l\right)^2\cdot\left(r+\frac{1}{2}l\right)^2}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}a^2-b^2=(a+b)(a-b)\\ a\equiv\left(r+\frac{1}{2}l\right),b\equiv\left(r-\frac{1}{2}l\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\left(r+\frac{1}{2}l\right)+\left(r-\frac{1}{2}l\right)\right)\left(\left(r+\frac{1}{2}l\right)-\left(r-\frac{1}{2}l\right)\right)}{\underbrace{\left(r-\frac{1}{2}l\right)^2}_{\simeq r^2}\cdot\underbrace{\left(r+\frac{1}{2}l\right)^2}_{\simeq r^2}}=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r+\cancel{\frac{1}{2}l}+r-\cancel{\frac{1}{2}l}\right)\left(\cancel{r}+\frac{1}{2}l-\cancel{r}+\frac{1}{2}l\right)}{r^2\cdot r^2}=$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r+r)\left(\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}l\right)}{r^2\cdot r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cdot \cancel{r}\cdot l}{r^{\cancel{4}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\overbrace{q\cdot l}^{p}}{r^{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}.$$

Полученная формула полностью совпадает с формулой (1.51):

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

Поле на перпендикуляре к оси диполя:

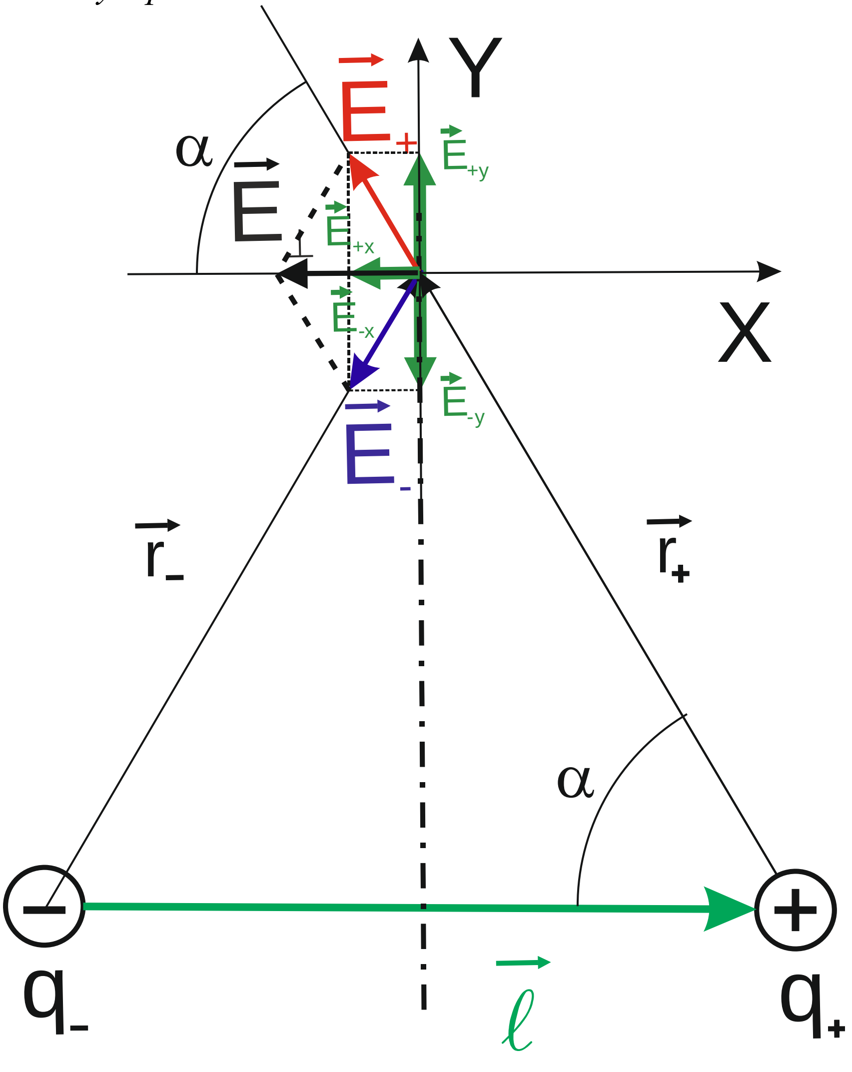


Рисунок 1.35
Поле на перпендикуляре к оси диполя

Результирующая напряжённость поля будет равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых положительным и отрицательным зарядами:

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}_x + \vec{E}_y.$$

При этом проекции на ось OY будут противонаправлены:

$$\bar{E}_{+y} \uparrow\downarrow \bar{E}_{-y}$$

и по этому их сумма будет равна нулю:

$$\bar{E}_{+y} + \bar{E}_{-y} = 0.$$

Проекции же на ось OX будут сонаправлены

$$\bar{E}_{+x} \uparrow\uparrow \bar{E}_{-x},$$

и, следовательно, результирующая напряжённость поля будет равна их алгебраической сумме:

$$\bar{E}_{\perp} = \bar{E}_{+x} + \bar{E}_{-x} = 2\bar{E}_{+x}.$$

А точнее, удвоенной величине одной из проекций.

Учтём следующие соотношения:

$$r_+^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2,$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{1}{2}l\right)}{r_+}.$$

Запишем выражение для поля точечного заряда для одного из зарядов (скажем, для положительного) и преобразуем его:

$$E_{+x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_+}{r_+^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2}\underbrace{\left(\frac{l/2}{r_+}\right)}_{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overbrace{ql}^{p}}{2\cdot\underbrace{r_+^3}_{\simeq r^3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{2r^3}$$

$$E_{\perp} = 2E_{+x} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\cancel{2}r^3},$$

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}.$$

Полученная формула полностью совпадает с формулой (1.52).

1.7.2. Диполь во внешнем электрическом поле

Для диполя во внешнем электрическом поле имеем следующие соотношения:

Потенциальная энергия диполя:

$$W = -\bar{p}\cdot\bar{E} = -\left(\bar{p},\bar{E}\right). \tag{1.53}$$

Момент силы, действующий на диполь:

$$\bar{M} = \bar{p}\times\bar{E} = \left[\bar{p},\bar{E}\right]. \tag{1.54}$$

Сила, действующая на диполь *в неоднородном электростатическом поле*:

$$F_x = p\frac{\partial E_x}{\partial l}. \tag{1.55}$$

Поскольку диполь в целом является электронейтральной системой суммарная сила, действующая со стороны электрического поля на диполь равна нулю (*однородного электрического поля*).

Однако в этом случае на диполь будет действовать момент сил, разворачивающий диполь так, что сориентирует электрический момент по полю.

Потенциальная энергия диполя в этом случае определяется формулой

$$W = -\left(\bar{p},\bar{E}\right),$$

либо (в других обозначениях)

$$W = -\bar{p}\cdot\bar{E}.$$

Утверждение следует из следующих рассуждений – в однородном электрическом поле разность потенциалов в направлении некоторого вектора (*в направлении вектора* $\bar{l}$ *– плеча диполя*) может быть представлена, как произведение производной потенциала по направлению вектора на длину этого вектора:

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial\varphi}{\partial l}l = .$$

А эта производная по направлению, в свою очередь, есть проекция вектора напряжённости на это направление (*с обратным знаком*):

$$= -E_l l = -\bar{E}\cdot\bar{l}.$$

С другой стороны, потенциальная энергия диполя есть сумма энергии положительного и отрицательного зарядов, и её можно представить следующим образом:

$$W = W_+ - W_- = q\varphi_+ - q\varphi_- = q\left(\varphi_+ - \varphi_-\right) =$$

А дальше, подставив выражение для разности потенциалов через напряжённость, и, сгруппировав заряд с вектором $\bar{l}$ (*это даст электрический момент*)

$$= q\left(-\bar{E}\cdot\bar{l}\right) = -q\bar{E}\cdot\bar{l} = -\left(\underbrace{q\bar{l}}_{\bar{p}}\right)\cdot\bar{E} =$$

$$= -\bar{p}\cdot\bar{E}.$$

Равнодействующая всех сил в однородном поле *будет равна 0*. В однородном электрическом поле на диполь будут действовать следующие силы:

$$F_{-} = qE,$$

$$F_{+} = qE.$$

Причём:

$$\left|F_{+}\right| = \left|F_{-}\right|.$$

Тогда:

$$\bar{F} = \bar{F}_{+} + \bar{F}_{-} = 0.$$

Таким образом, сила, действующая на диполь в однородном магнитном поле равна нулю.

Однако *момент сил не будет равен нулю*. Рассчитаем момент относительно центра – точки, где расположен отрицательный заряд. Момент силы, действующий на отрицательный заряд будет равен нулю, однако для положительного заряда получим:

$$M_0 = \bar{l}\times\bar{F}_{+} = \bar{l}\times(q\bar{E}) = q\bar{l}\times\bar{E} = (q\bar{l})\times\bar{E} = \bar{p}\times\bar{E}.$$

$$\bar{M} \neq 0.$$

В неоднородном магнитном поле на диполь будет действовать сила, втягивающая диполь в поле. Дело в том, что в этом случае силы, действующие на разные заряды, уже не будут равны:

$$F_{-} = qE_{-}$$

$$F_{+} = qE_{+}$$

$$E_{-} > E_{+} \Rightarrow \bar{F} = \bar{F}_{-} + \bar{F}_{+} \neq 0$$

1.7.3. Поле системы зарядов

Рассмотрим систему двух зарядов (*диполь*):

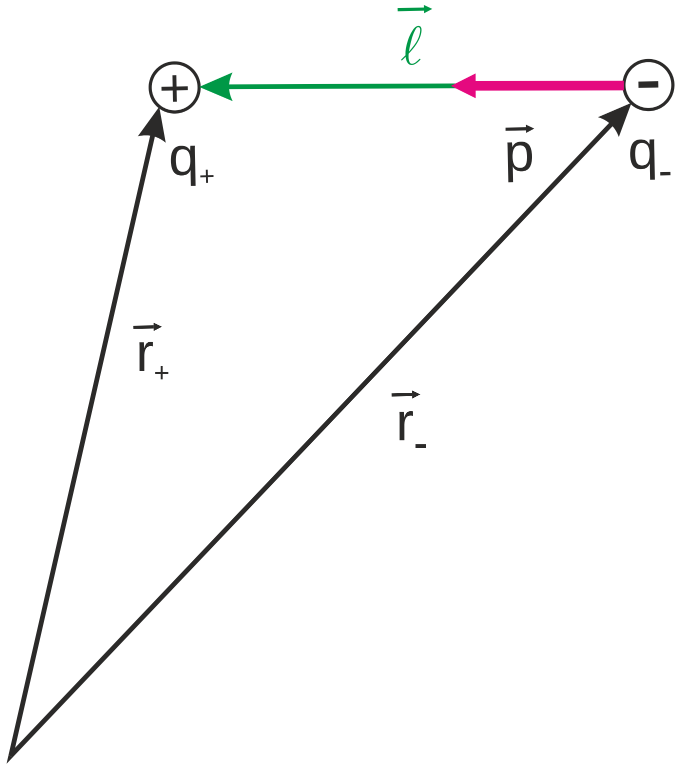


Рисунок 1.36
Диполь, как система двух зарядов

$$\overline{p} = q\overline{l}$$

$$\overline{l} = \overline{r}_+ - \overline{r}_-$$

$\overline{r}_+, \overline{r}_-$ радиус-вектора, задающие положение «+» и «-» заряда.

Тогда электрический (*дипольный*) момент можно представить следующим образом:

$$\overline{p} = q\overline{l} = q(\overline{r}_+ - \overline{r}_-) = q\overline{r}_+ - q\overline{r}_- = q_+\overline{r}_+ + q_-\overline{r}_- = \sum_{i=1}^{2} q_i\overline{r}_i \,,$$

здесь:

$$q_+ = q$$

$$q_- = -q$$

Для характеристики системы зарядов используется величина, называемая *электрическим* моментом.

Df. Электрический момент:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \overline{r_i} \,. \tag{1.56}$$

Замечание: в первом приближении электрический дипольный момент можно представить как векторную сумму всех электрических моментов системы.

2. Электростатическое поле в веществе

2.1. Проводник и электрическое поле

2.1.1. Проводник

Df 1. Проводник – это тело, способное проводить электрический ток.

Df 2. Электрический ток: пусть через некоторую поверхность осуществляется перенос электрического заряда (физические величины заряда кулона), т.е. поток заряда через эту поверхность не равен нулю. В этом случае будем утверждать, что через эту поверхность протекает электрический ток.

Для обеспечения переноса заряда через поверхность необходимо наличие свободно движущихся частиц. Эти частицы называются **носителями заряда**.

Отсюда имеем второе определение электрического тока.

Df 2.1. Электрический ток – упорядоченное движение заряженных частиц.

Т.о. **проводник –** это тело, в котором имеются в наличие носители зарядов.

Замечание: будем считать, что количество носителей заряда достаточно велико.

2.1.2. Электрическое поле в проводнике, заряд в проводнике

Электрическое поле в проводнике отсутствует. Заряды в проводнике распределяются по поверхности.

Пусть внутри проводника существует хотя бы один нескомпенсированный заряд. Окружим его замкнутой поверхностью и приметим теорему Гаусса. Через поверхность будет течь ненулевой поток напряжённости электрического поля. Под действием этого поля носители заряда придут в движение, возникнет электрический ток. Он будет течь до тех пор, пока наш заряд не будет скомпенсирован. Единственной поверхностью, поток через которую на приведёт к возникновению электрического тока, будет поверхность самого проводника. Причём, это будет эквипотенциальная поверхность, чтобы не привести к возникновению токов, циркулирующих по самой поверхности.

Таким образом, электрическое поле в проводнике отсутствует. Заряды в проводнике будут распределяются по поверхности проводника.

2.1.3. Проводник в электрическом поле

Пусть проводник помещен во внешнее электрическое поле.

Утверждение 1: поле внутри проводника отсутствует, т.е. напряженность равна нулю, а потенциал постоянен (*в принципе, не зависимо от того, заряжен проводник или нет, или это заряженный проводник вне электрического поля*).

$$E = 0$$

$$\varphi = const$$

Под действием поля носители зарядов в проводнике приходят в движение. Движение будет продолжаться до тех пор, пока создаваемое ими поле не скомпенсирует внешнее поле.

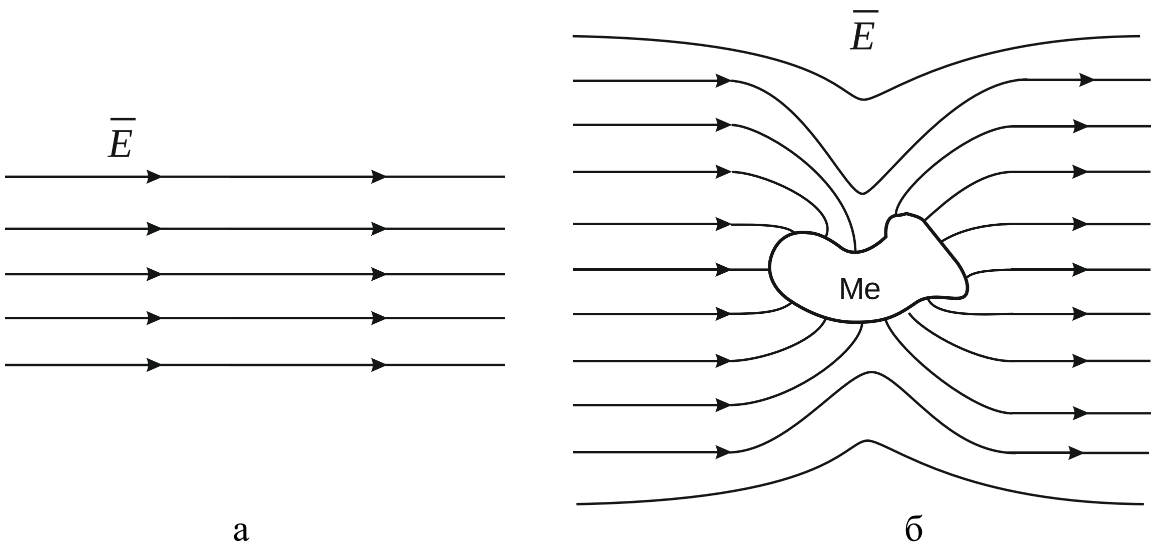
Утверждение 2: поверхность проводника есть эквипотенциальная поверхность.

Поверхность проводника принадлежит самому проводнику. Следовательно, потенциал поверхности во всех точках будет равен потенциалу внутри проводника.

Утверждение 3: силовые линии вблизи поверхности проводника перпендикулярны поверхности проводника. Следует из того, что силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности.

Утверждение 4: в проводнике заряды располагаются по поверхности (*если проводник заряжен, независимо от того, внесён он во внешнее электрическое поле или нет*).

Пусть внутри проводника есть некомпенсированный заряд. Проведем вокруг него произвольную гауссову поверхность (замкнутую поверхность). По теореме Гаусса поток вектора напряженности через эту поверхность равна нулю. Это приведет к движению носителей зарядов.



а б

Рисунок 2.1

Электрическое поле вблизи проводника:

а – исходное поле,

б – поле, после внесения в поле проводника

2.2. Диэлектрики в электрическом поле

2.2.1. Диэлектрики

Df 1*: *Диэлектрики – вещества не способные проводить электрический ток (см. выше).

Они бывают полярные и неполярные.

Df 2*: *Полярные диэлектрики – молекулы с ковалентной полярной связью. Дипольный момент таких молекул неравен нулю.

Df 3*: *Неполярные диэлектрики образованы молекулами с ковалентной неполярной связью. Дипольный момент таких молекул равен нулю.

Однако если поместить неполярный диэлектрик во внешнее электрическое поле электрическая плотность в молекулах сместится и у молекул появится наведенный дипольный момент ориентиров по полю.

Суммарный дипольный момент таких молекул в некотором объеме неравен нулю.

Для полярных диэлектриков можно показать, что в исходном состоянии суммарный дипольный момент молекул в некотором объеме равен нулю (за счет произвольной ориентации молекул).

Во внешнем электрическом поле такие молекулы будут разворачиваться по полю и суммарный дипольный момент также станет не равен нулю.

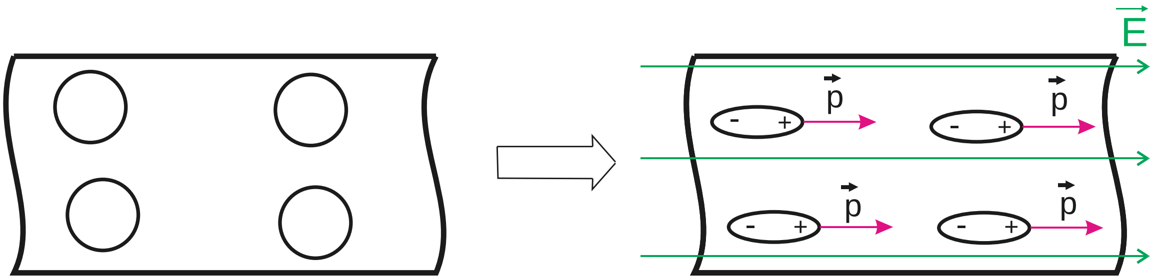


Рисунок 2.2
Неполярный диэлектрик

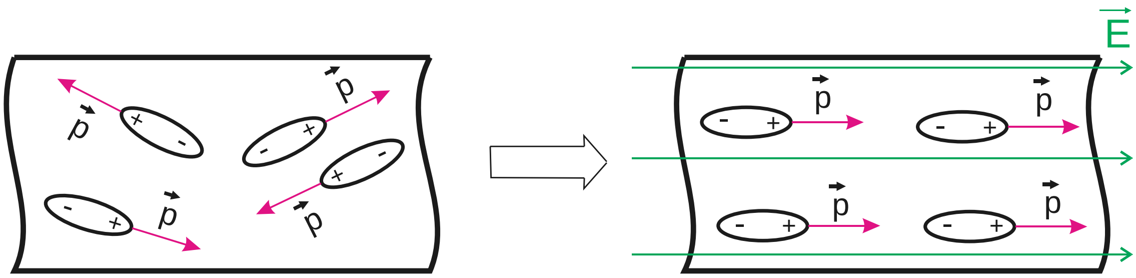


Рисунок 2.3
Полярный диэлектрик

Для характеристики суммарного дипольного момента диэлектриков используется величина, называемая поляризованностью.

Измеряется в *кулонах, умноженных на метр*, $[Кл \cdot м] = [Кл][м]$.
Международное обозначение $[Wb]$.

Df. Поляризованность:

$$\overline{P}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i \tag{2.1}$$

Здесь:

$\overline{P}$ – поляризованность (*иногда поляризация*),

ΔV – физически малый объем,

$\overline{p}_i$ – электрические (*дипольные*) моменты молекул.

По смыслу величина будет средним диполем (*средним электрическим моментом молекул*):

$$\overline{P}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i=\underbrace{\frac{\Delta N}{\Delta N}}_{1}\cdot\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i=$$

$$\underbrace{\frac{\Delta N}{\Delta V}}_{n}\cdot\frac{1}{\Delta N}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i=n\cdot\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i}{\Delta N}}_{\langle\overline{p}\rangle}=n\langle\overline{p}\rangle.$$

Окончательно:

$$\overline{P}=n\langle\overline{p}\rangle, \tag{2.2}$$

где:

$\overline{P}$ – поляризованность

n – концентрация молекул

$\langle p\rangle$ – средний электрический (*дипольный*) момент молекул.

Есть ещё одна полезная формула.

Пусть

$$\overline{p}_i=q_i\overline{l_i}$$

Пусть все диполи имеют приблизительно равную величину *плеча диполя*:

$$\overline{l}_i\simeq const$$

$$l_i\simeq l$$

$$\left(\overline{l}_i\simeq\overline{l}\,;l=\langle\overline{l}\rangle\,cp.\right).$$

Тогда:

$$\overline{P}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}q_i\overline{l}=\frac{\sum_{i=1}^{N}q_i}{\Delta V}\overline{l}=\rho_+\overline{l}\ .$$

Здесь:

$$\sum_{i=1}^{N}q_i \text{ - суммарный «+» заряд в } \Delta V\ .$$

$$\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{N}q_i}{\Delta V}=\frac{Q_+}{\Delta V}=\rho_+$$

Таким образом

$$\overline{P}=\rho_+\overline{l}\ . \tag{2.3}$$

поляризованность равна плотности положительных зарядов, умноженной на среднее плечё диполя.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле в диэлектрике будет возникать наведенный дипольный момент молекул, либо это будет приводить к ориентации диполей по полю. В любом случае суммарное поле диполей будет ослаблять внешнее электрическое поле.

Утверждение: можно показать (*доказать, экспериментальный факт…*), что поляризованность диэлектрика будет пропорциональна напряженности электрического поля.

$$\overline{P}=\kappa\varepsilon_0\overline{E} \tag{2.4}$$

κ – диэлектрическая восприимчивость среды

Замечание: напряженность электрического поля E, означенная в этой формуле, есть результирующая напряженность поля в диэлектрике ослабленного влиянием диполей, которое при необходимости мы можем измерить приборами.

2.2.2. Теорема Гаусса для вектора поляризованности.

Df 1: будем называть ***свободными зарядами*** заряды частиц, не связанные в диполе или другие электронейтральные системы (***q***).

Df 2: будем называть ***связанными зарядами*** заряды частиц, связанные в диполе и другие электронейтральные системы (q').

Замечание 1. *Свободные заряды* – это те заряды, которые создают исходное поле.

Замечание 2. Существует и другое определение связанных зарядов: *связанные заряды* – это *нескомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика и входящие в состав его молекул* (учебник Савельева, в частности). Это определение страдает двумя весьма серьёзными недостатками. Во-первых, спорный вопрос, какие заряды называть «*нескомпенсированными*». Заряды, которые создают хоть какое какое-нибудь электрическое поле на расстоянии? Но, тогда *скомпенсированных* зарядов просто не существует (вопрос, в каком объёме мы их будем рассматривать)! Мы будем говорить, что заряд *скомпенсирован*, если в суммарный заряд рассматриваемого объекта (тела, частицы, молекулы, объёма сплошной среды) равен нулю. В этом смысле все связанные заряды, конечно скомпенсированы. Утверждение «*…появляющиеся в результате поляризации*» тоже спорно. Никто не запрещает нам считать те же электроны на орбитали атома носителями связанного заряда. Никаких противоречий здесь не возникнет. Ну и конечно же, тогда уже надо указывать в списке, помимо молекул, атомы, частицы, кварки и т.д. Однако, несмотря на всё это, мы не будим считать за ошибку подобное определение связанных зарядов. 😊

Th. Поток вектора поляризованности через замкнутую поверхность пропорционален суммарной величине связанных зарядов, расположенных внутри этой поверхности.

$$dq' = \rho'_+ dV_+ - \rho'_- dV_- = \rho'_+ dV_+ + |\rho'_-| dV_- =$$

$$= \rho'_+ \underbrace{l_+ dS\cos\alpha}_{dV_+} + \underbrace{\rho'_+}_{|\rho'_-|} \underbrace{l_- dS\cos\alpha}_{dV_-} = \rho'_+ \underbrace{(l_+ + l_-)}_{l} dS\cos\alpha =$$

$$= \rho'_+ \underbrace{l\,dS\cos\alpha}_{\bar{l}\cdot d\bar{S}} = \underbrace{\rho'_+ \bar{l}}_{\bar{P}} \cdot \underbrace{\bar{n}\,dS}_{d\bar{S}} = \bar{P}\cdot d\bar{S}$$

$$\underbrace{\sum q'}_{\text{В объёме } V} = \rho' V \Rightarrow \underbrace{dq'}_{\text{В объёме } dV} = \rho' dV$$

$$dV_+ = l_+ dS\cos\alpha$$

$$dV_- = l_- dS\cos\alpha$$

$$\rho_+ = |\rho_-|$$

$$l = l_+ + l_-$$

$$\bar{l}\cdot\bar{n}\,dS = l dS\cos\alpha$$

$$\bar{P} = \rho'_+ \bar{l}$$

$$d\bar{S} = \bar{n}\,dS$$

$$\underbrace{\oint_{S_1} dq'}_{q'} = \oint_{S_1} \bar{P}\cdot d\bar{S}$$

$$\int dq' = q'.$$

Окончательно получаем:

$$\oint\limits_{S_1} \overline{P} \cdot d\overline{S} = -q' \qquad (2.5)$$

Знак «–» т.к. q ₋ – внутри поверхности соответствующего $\overline{P}$ сонаправленного с $\overline{n}$.

«На пальцах» смысл этой теоремы можно пояснить следующем образом: связанные заряды – это заряды, связанные либо в диполи (поляризованные молекулы), либо связанные в неполярные системы (неполяризованные молекулы). Ориентация диполей произвольна, неполярные молекулы вообще не имеют электрического (дипольного) момента.

Если в некоторую точку (внутрь замкнутой поверхности) поместить заряд (свободный заряд), поляризованные молекулы развернутся так, как этого требует действующий на них момент силы. Заряды знака противоположного знаку внесённого заряда переместятся в сторону к внесённому заряду, противоположного – отодвинутся от него. У неполярных молекул появится электрический (дипольный) момент и один заряд сдвинется к, а другой от внесённого заряда, так же в зависимости от знака. При этом суммарный заряд нашего тела не изменится и будет равен величине внесённого нами свободного заряда (диполи, существовавшие «до» или возникшие «в результате», в целом останутся электронейтральными системами).

Но рассмотрим те диполи (существовавшие или образовавшиеся), которые расположены буквально на поверхности, так, что наша замкнутая гауссова поверхность проходит «через» эти диполи (см. Рисунок 2.4). При этом один заряд диполя (притянувшийся или сместившийся в сторону нашего внесённого в центр свободного заряда) окажется внутри этой замкнутой поверхности, а другой снаружи. Именно эти заряды, оказавшиеся «внутри» и создадут избыточный заряд *связанных зарядов*, заключённый внутри нашей поверхности. Это объясняется тем, что вторая их половинка оказалась *снаружи поверхности*.

При этом электрические (дипольные) моменты этих диполей повернутся перпендикулярно нашей поверхности (см. рисунок), «проткнут» её (в ту или другую сторону, внутрь или наружу) и создадут поток электрического (дипольного) момента через эту поверхность.

Таким образом:

1. Суммарная величина связанного заряда (q') внутри нашей поверхности будет определятся количеством диполей, оказавшихся на границе нашей области, ограниченной данной поверхностью.
2. Поток вектора прляризованности $(\overline{P})$, который в первом приближении будет пропорционально суммарному числу векторов электрического (дипольного) момента, проткнувших нашу поверхность (надо ещё поделить на плечо диполя, одинаковое для всех диполей), которое, так же будет определяться количеством

диполей, оказавшихся на границе нашей области, ограниченной данной поверхностью:

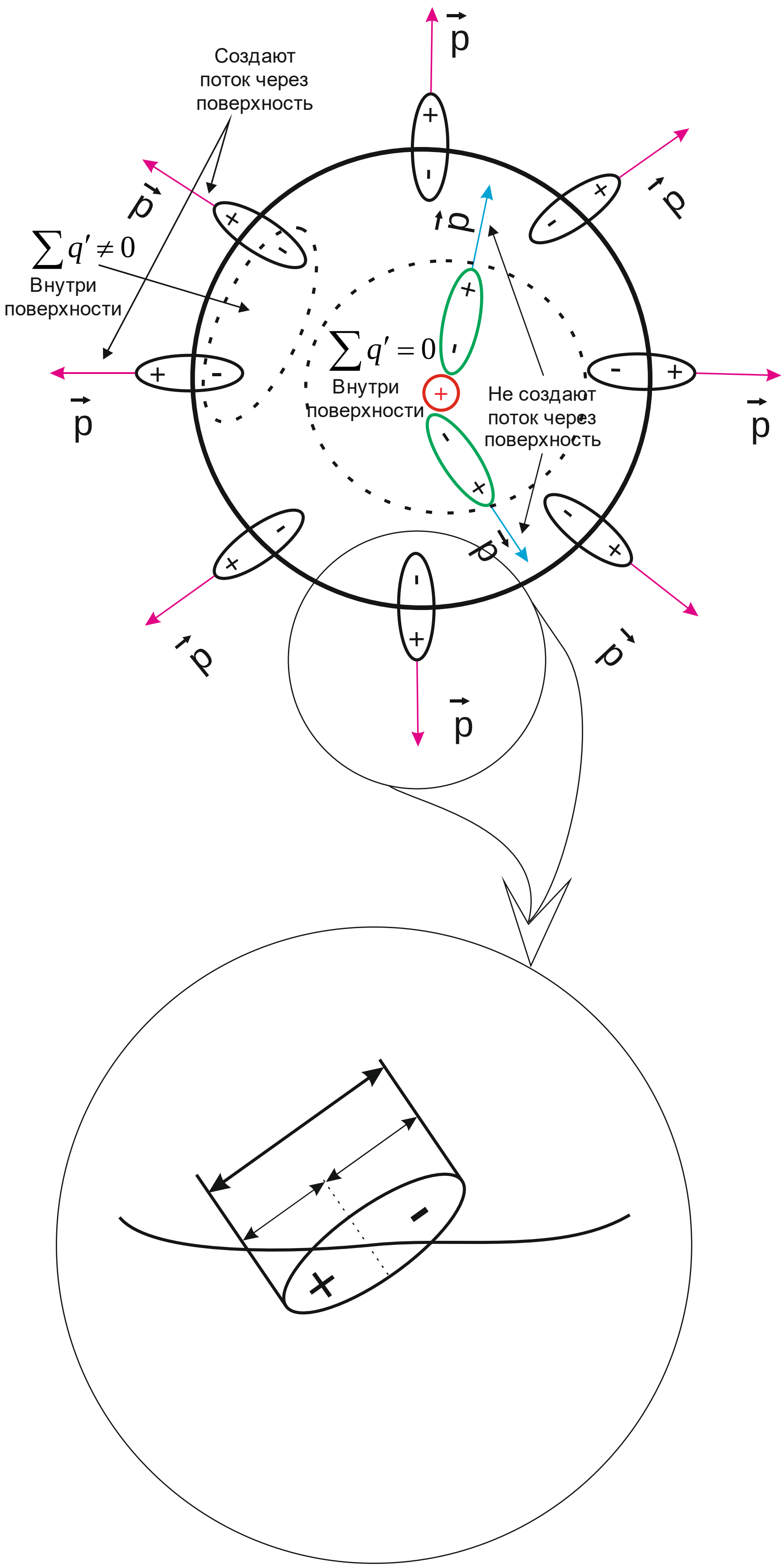
$$\overline{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i = \frac{1}{\Delta S \cdot h}\sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i \,,$$

$$\oint\limits_{S_1}\overline{P}\cdot d\overline{S} \approx \sum_{j=1}^{M} P\cdot\Delta S\cos\beta = \sum_{j=1}^{M}\underbrace{\left(\frac{1}{\cancel{\Delta S}\cdot h}\sum_{i=1}^{N}p_i\right)}_{P}\cdot\cancel{\Delta S}\cos\beta =$$

$$= \frac{\cos\beta}{h}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}p_i = \frac{1}{h/\cos\beta}\sum_{k=1}^{M\cdot N}p_i = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{M\cdot N}p_i = \frac{1}{\cancel{l}}\sum_{k=1}^{M\cdot N}q_i'\cancel{l} = \sum_{k=1}^{M\cdot N}q_i' = q' \,.$$

$$h = l\cos\beta \Rightarrow l = h/\cos\beta$$

3. Поскольку и та и другая величина определяются количеством диполей, оказавшихся на границе нашей области, ограниченной данной поверхностью, они будут пропорциональны. Это и утверждает теорема.



Создают
поток через
поверхность
$\sum q' \neq 0$
Внутри
поверхности
$\sum q' = 0$
Внутри
поверхности
Не создают
поток через
поверхность
$\vec{p}$

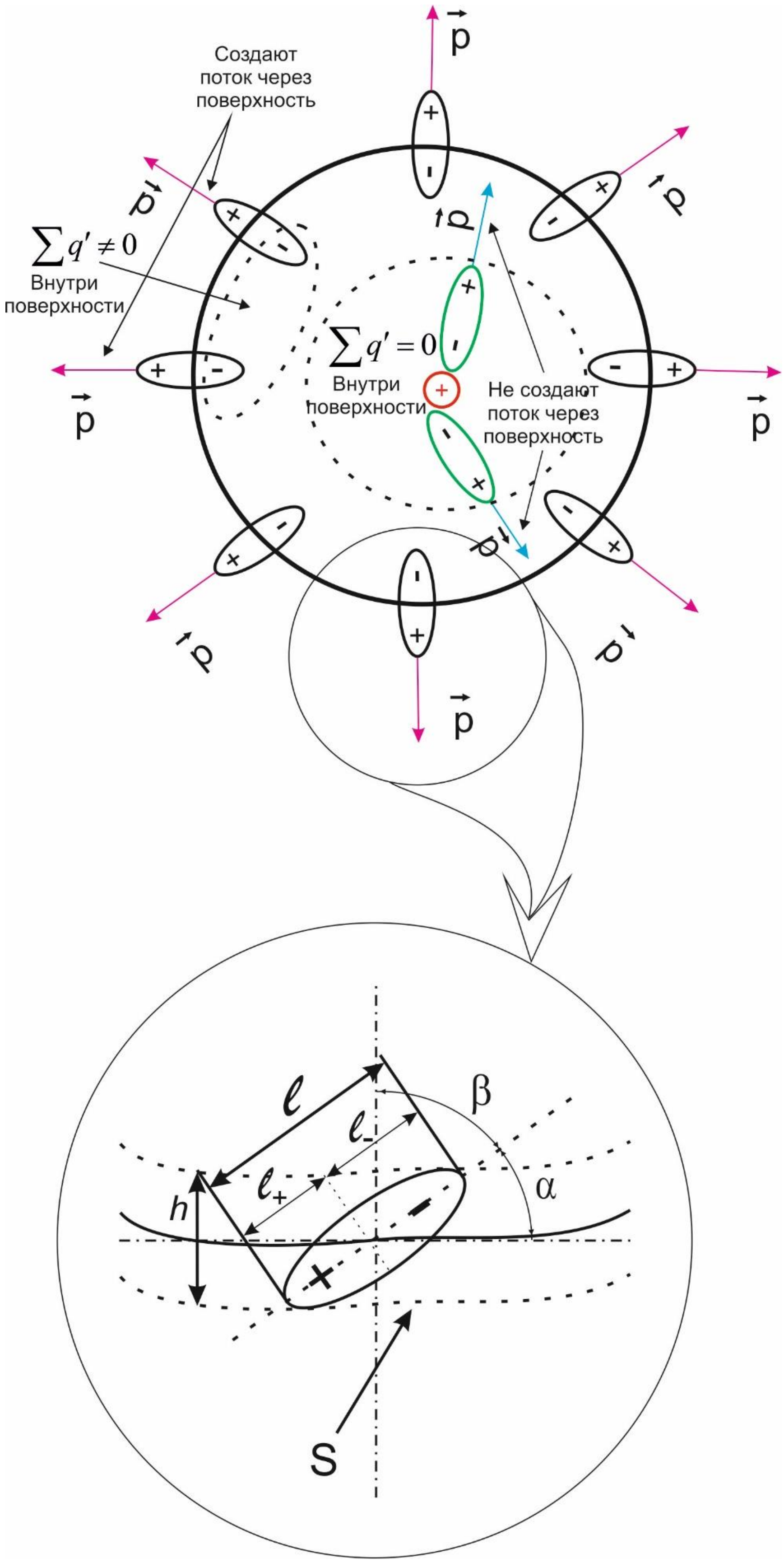


Рисунок 2.4
Поток поляризовонности через замкнутую поверхность

2.2.3. Диэлектрическая проницаемость среды

Рассмотрим замкнутую поверхность внутри диэлектрика и запишем для нее теорему Гаусса.

$$\oint_{S_1} \overline{E} \cdot d\overline{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + q'\right)$$

$\left(q + q'\right)$ – сумма свободных и связанных зарядов.

Обратите внимание! В данном случае ε у нас *пока ещё не существует*!

$$\varepsilon_0 \cdot \oint_{S_1} \overline{E} \cdot d\overline{S} = q + \underbrace{q'}_{-\oint_{S_1} \overline{P} \cdot d\overline{S}}$$

$$\oint_{S_1} \varepsilon_0 \overline{E} \cdot d\overline{S} = q - \oint_{S_1} \overline{P} \cdot d\overline{S}$$

$$\oint_{S_1} \varepsilon_0 \overline{E} \cdot d\overline{S} + \oint_{S_1} \overline{P} \cdot d\overline{S} = q$$

$$\oint_{S_1} \underbrace{\left(\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}\right)}_{\overline{D}} \cdot d\overline{S} = q$$

Здесь

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} \tag{2.6}$$

– вектор *электрического смещения* (*устар. электрическая индукция*).

Измеряется в *кулонах на метр квадратный*, $\left[Кл \cdot м^2\right] = \left[Кл\right]\left[м\right]^2$.

Окончательно имеем:

$$\oint_{S_1} \overline{D} \cdot d\overline{S} = q \,. \tag{2.7}$$

Это утверждение называется теоремой гаусса для диэлектрика.

И так:

Th. Гаусса для диэлектрика. Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности.

Таким образом, ***теорема Гаусса в веществе*** (*в диэлектрике*) примет вид:

1. В интегральной форме: поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен сумме зарядов (свободных зарядов), расположенных внутри этой поверхности.

$$\Phi_D = \oint_{S_1} \bar{D} \cdot d\bar{S} = \sum_{i=1}^{N} q_i \tag{2.8}$$

2. В дифференциальной форме: дивергенция вектора электрического смещения равна плотности электрических зарядов (*свободных зарядов*)

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho \tag{2.9}$$

Вектор электрического смещения. Рассмотрим вектор электрического смещения более подробно:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \bar{E} + \underbrace{\kappa \varepsilon_0 \bar{E}}_{\bar{P}} = (\underbrace{1+\kappa}_{\varepsilon}) \varepsilon_0 \bar{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}.$$

Здесь мы учли, что, как было сказано выше, поляризованность пропорциональна напряженности электрического поля в диэлектрике:

$$\bar{P} = \kappa \varepsilon_0 \bar{E},$$

и ввели новую величину:

$$1 + \kappa = \varepsilon \tag{2.10}$$

– ***диэлектрическая проницаемость среды***.

Окончательно, имеем выражение для вектора электрического смещения:

$$\bar{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E} \tag{2.11}$$

Замечание: *физический смысл* $\bar{D}$.

Вектор *электрического смещения* является вспомогательной характеристикой электрического поля и определяется только свободными зарядами, т.е. зарядами, создающими исходное поле, и не зависит от свойств вещества (среды), в котором мы это поле рассматриваем.

2.2.4. Явления на границе двух диэлектриков

Выясним, как ведёт себя электростатическое поля на границе раздела двух диэлектриков. Для этого вспомним уравнение для циркуляции электростатического поля и теорему Гуса для вектора электрического смещения (формулы (2.11), (2.8), (1.48), (1.47)):

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0 \Leftrightarrow \oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0,$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho,\ \rho = 0 \Leftrightarrow \oiint_{S_1} \bar{D} \cdot d\bar{S} = q,\ q = 0.$$

Сначала разберёмся с циркуляцией. Рассмотрим циркуляцию вектора напряжённости электростатического поля по прямоугольному контуру, охватывающему границу раздела диэлектриков.

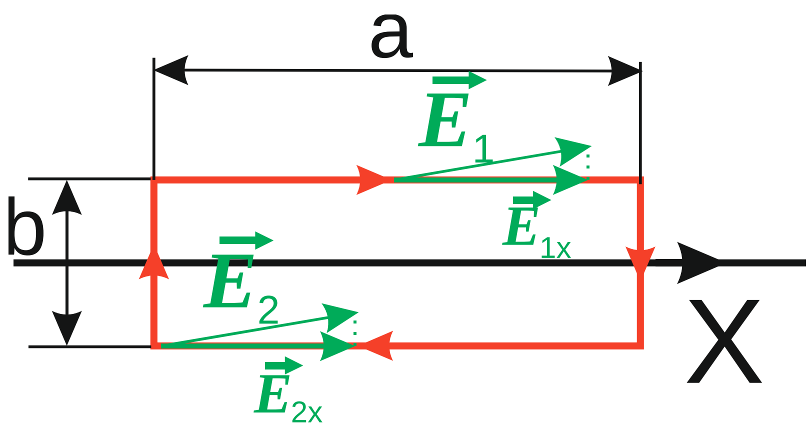


Рисунок 2.5
Циркуляция вектора напряжённости электростатического поля
на границе раздела двух диэлектриков

И путь сторона ***a*** этого прямоугольного контура направлена вдоль горизонтальной оси ***OX***. Тогда эта циркуляция будет равна:

$$\oint_{l_1} \bar{E}\cdot d\bar{l} = E_{1x}\cdot a - E_{2x}\cdot a + \underbrace{\langle E_b\rangle\cdot 2b}_{0} = 0 .$$

Пусть сторона b этого контура пренебрежимо мала $(b \to 0)$ – контур непосредственно прилегает к границе раздела с той и другой стороны. Тогда последнее слагаемое в циркуляции превращается в ***0***. Первые же два слагаемых представляют проекцию вектора напряжённости ***E*** на горизонтальную ось (*тангенциальную составляющую вектора напряжённости* E_τ), умноженную на длину стороны ***a***. Тогда получим:

$$E_{1x}\cdot \cancel{a} - E_{2x}\cdot \cancel{a} = 0,$$

$$E_{1x} - E_{2x} = 0,$$

$$E_{1x} = E_{2x},$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \qquad (2.12)$$

Учтя соотношение между напряжённостью электрического поля и вектором электрического смещения:

$$E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} D \, ,$$

получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1 \cancel{\varepsilon_0}} D_{1\tau} = \frac{1}{\varepsilon_2 \cancel{\varepsilon_0}} D_{2\tau} \, ,$$

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} \, .$$

Окончательно, на границе раздела двух диэлектриков отношение горизонтальных (*тангенциальных*) составляющих векторов электрического смещения будут равно отношению диэлектрических проницаемостей жвх сред:

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \, . \tag{2.13}$$

Теперь вернёмся к исходным формулам и рассмотрим теорему Гаусса для вектора электрического смещения. В отличии от аналогичной теоремы для вектора напряжённости, здесь будут отсутствовать лишние константы ε и ε_0. Причём в виде гауссовой поверхности выберем цилиндр, у которого торцевые поверхности параллельны границе раздела (*аналогично тому, как это было сделано при выводе формулы для напряжённости поля бесконечной однородно заряженной плоскости*).

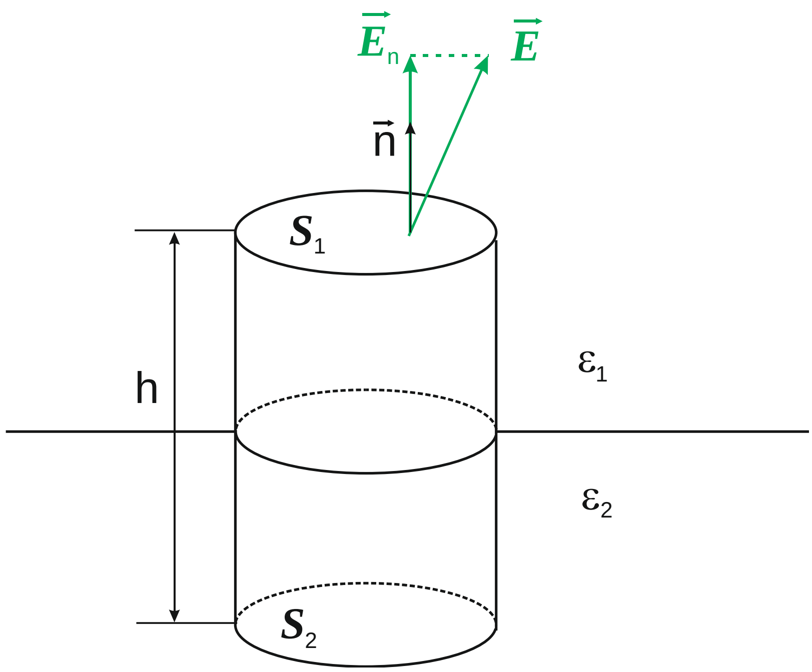


Рисунок 2.6
Применение теоремы Гаусса на границе двух диэлектриков

Тогда площади двух торцевых поверхностей будут равны:

$$S_1 = S_2 = S \ .$$

И этот поток по теореме Гаусса будут равен заряду, заключённому внутри этой поверхности. Но этот заряд равен нулю (*диэлектрики не заряжены, а связанные заряды полностью скомпенсированы*). При этом, как и в первой части устремим к нулю высоту цилиндра $\left(h \to 0 \Rightarrow S_{бок.} \to 0\right)$ – тогда последнее слагаемое суммы обращается в ***0***. Также заметим, что *поток через торцевую поверхность* вектора ***D*** будет равен произведению нормальной составляющей этого вектора на соответствующую площадь поверхности (*за счёт скалярного произведения на нормаль, учитывая, что обе торцевых поверхности параллельны границе раздела диэлектриков*):

$$\oiint\limits_{S_1} \bar{D} \cdot d\bar{S} = D_{1n}S - D_{2n}S + \underbrace{\left\langle D_n \right\rangle S_{бок.}}_{0} = q \ ,$$

$$q = 0 \Rightarrow D_{1n}S - D_{2n}S = 0 \ .$$

Сократим площади торцевых поверхностей, которые равны:

$$D_{1n} \cancel{S} = D_{2n} \cancel{S} \ ,$$

и получим, что равны и нормальные составляющие вектора электрического смещения:

$$D_{1n} = D_{2n} = D_n \ . \qquad (2.14)$$

Учитывая связь между вектором электрического смещения и напряжённостью электрического поля:

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E \ ,$$

получим

$$\varepsilon_1 \cancel{\varepsilon_0} E_{1n} = \varepsilon_2 \cancel{\varepsilon_0} E_{2n} \ ,$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \ .$$

Для нормальной составляющей электростатического поля на границе раздела двух диэлектриков отношение нормальных составляющих векторов напряжённости электростатического поля будет равно отношению диэлектрических проницаемостей двух сред:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ . \qquad (2.15)$$

Если учесть, что тангенс угла между нормалью к поверхности и вектором будет равна отношению тангенциальной и нормальной составляющих этого вектора:

$$tg\alpha = \frac{D_\tau}{D_n} \ ,$$

можно получить выражение для отношения тангенсов этих углов для векторов D в обоих диэлектриках:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}=\frac{D_{\tau 1}/D_{n1}}{D_{\tau 2}/D_{n2}}=\frac{D_{\tau 1}/\cancel{D_n}}{D_{\tau 2}/\cancel{D_n}}=\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,.$$

Он будет равен отношению диэлектрических проницаемостей двух сред.

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,. \qquad (2.16)$$

3. Энергия электростатического поля

3.1. Энергия системы зарядов

1. *Рассмотрение на простейшем примере.* Рассмотрим заряд во внешнем электростатическом поле. По определению потенциала φ :

$$\varphi = \frac{W}{q} \Rightarrow W = q\varphi ,$$

где W – энергия системы двух зарядов. Для расчёта потенциальной энергии через потенциал мы можем рассмотреть один из зарядов, как создающий поле, рассчитать для этого поля потенциал в точке, где расположен второй заряд и рассмотреть второй заряд, как заряд, внесённый в поле первого заряда. Причём, как заряд создающий поле может быть рассмотрен как заряд (1), так и заряд (2).

Если поле создаёт заряд (1), тогда энергия заряда (2) в поле, созданном зарядом (1):

$$W_2 = q_2\varphi_2 = q_2\varphi_{21}$$

Здесь φ_2 – потенциал электростатического поля в точке, где размещён заряд (2), φ_{21} – потенциал, создаваемый в точке, где размещён заряд (2) зарядом (1), та же самая величина. Потенциал является скалярной величиной и потенциал поля, создаваемый системой зарядов в некоторой точке, есть скалярная сумма потенциалов электростатического поля, создаваемых каждым зарядом в отдельности (*следствие принципа суперпозиции*).

Если поле создаёт заряд (2), тогда энергия заряда (1) в поле, созданном зарядом (2):

$$W_1 = q_1\varphi_1 = q_1\varphi_{12}$$

Здесь φ_1 – потенциал электростатического поля в точке, где размещён заряд (1), φ_{12} – потенциал, создаваемый в точке, где размещён заряд (1) зарядом (2), та же самая величина..

Заметим, что, на самом деле, речь идёт об одной и той же энергии, об одной и той же величине. Следовательно, обе эти величины равны:

$$W = W_1 = W_2$$

Тогда можно записать, что:

$$W = \frac{1}{2}\left(W_1 + W_2\right),$$

или

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21})$$

Поскольку потенциал в точке (1) создается только лишь зарядом (2), то:

$$\varphi_1 = \varphi_{12}.$$

Аналогично для точки (2) и заряда (1):

$$\varphi_2 = \varphi_{21}.$$

В итоге:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{2} \varphi_{ij}.$$

В общем и целом, имеем выражение:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i. \qquad (3.1)$$

Здесь мы суммируем по всем зарядам, умноженным на потенциал поля (суммарный), созданной в точке их размещения. Коэффициент ½ говорит о том, что каждый раз одну и ту же энергию мы учитываем два раза – первый, когда считаем заряд, как создающий поле, второй, когда считаем заряд, кА внесённый в поле.

Теперь, в случае нескольких зарядов, создающих поле в одной и той же точке, надо скалярно просуммировать все их потенциалы, за исключением, конечно, заряда, размещённого в этой точке. Для последнего величина будет ровняться бесконечности и не будет иметь смысла:

$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \varphi_{ij}. \qquad (3.2)$$

Подставив выражение в предыдущую формулу, получаем, что энергия системы зарядов может быть посчитана, как:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} q_i\varphi_{ij}. \qquad (3.3)$$

Либо, ещё раз:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i, \qquad \varphi_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \varphi_{ij}.$$

2. *Точный вывод выражения.* Ещё раз для системы зарядов, исходя из энергии каждого заряда. Пусть имеется система N зарядов

Пусть W_{ij} - потенциальное взаимодействие i-ого и j-ого заряда.

Тогда

$$W = W_{12} + W_{13} + \ldots + W_{1n} + W_{23} + W_{24} + \ldots + W_{2n} +$$

$$+ \ldots + W_{ii+1} + W_{ii+2} + \ldots + W_{in} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} W_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i$$

3. *На примере матрицы* (*от куда взялась одна вторая?*):

$$\begin{pmatrix} \infty & q_1\varphi_{12} & \cdots & q_1\varphi_{1N} \\ q_2\varphi_{21} & \infty & \cdots & q_2\varphi_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_N\varphi_{N1} & q_N\varphi_{N2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}.$$

Это симметричная матрица, диагональные элементы которой равны бесконечности и не имеют смысла. Нам нужна сумма всех её элементов выше или ниже диагонали. Но, проще просуммировать все элементы, исключая диагональ и подели затем на два.

4. *Энергия системы точечных зарядов*. Учтём, что:

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}.$$

Это следует из формулы для потенциала точечного заряда. Причём мы вычисляем потенциал, создаваемый зарядом ***j*** в точке, где находится заряд ***i***. Тогда:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} q_i \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

И окончательно:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (3.4)$$

3.2. Электрическая емкость. Энергия электрического поля.

3.2.1. Электрическая емкость уединенного проводника и конденсатора.

Можно показать, что потенциал уединенного проводника будет пропорционален заряду этого проводника $\varphi \sim q$

Коэффициент пропорциональности называется электрической емкостью уединенного проводника.

$$q = C\varphi \tag{3.5}$$

С – электрическая емкость проводника

Иначе

$$C = \frac{q}{\varphi} \tag{3.6}$$

Емкость проводника – это заряд, который нужно сообщить проводнику, чтобы увеличить его потенциал на 1 Вольт.

Измеряется в *фарадах,* $[\Phi] = \frac{[Кл]}{[B]} = \frac{[A][c]^4}{[кг][м]^2}$. Международное обозначение $[F]$.

Пример: *Потенциал шара (сферы)*

Рассмотрим напряжённость электростатического поля, создаваемого проводящим шаром или сферой, на поверхности этого шара или сферы (***R*** – *радиус сферы, шара*):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2},$$

$$E = \frac{d\varphi}{dr},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$$

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi.$$

В итоге электрическая ёмкость шара или сферы равна:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{3.7}$$

3.2.2. Конденсатор. Емкость конденсатора

Конденсатор – система из двух проводников, имеющих равные по величине и разные по знаку заряды.

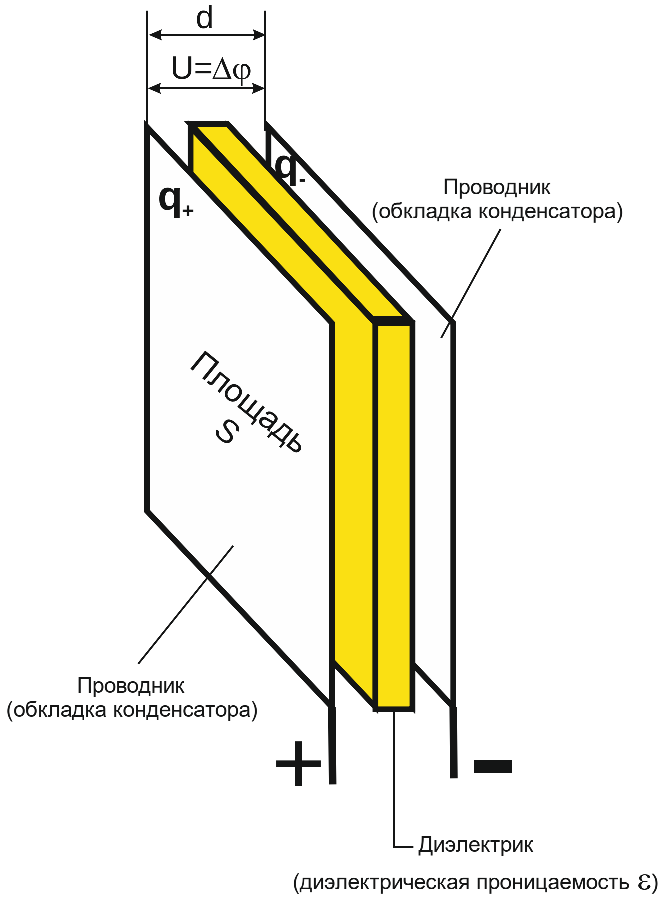


Рисунок 3.1
Плоский конденсатор

$$q_+ = +q$$

$$q_- = -q$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$[U = \varphi_1 - \varphi_2]$$

Утверждение: заряд на каждой из обкладок (каждого из проводников) пропорционален разности потенциалов.

$$q = C\Delta\varphi \quad (3.8)$$

$$[q = CU]$$

С – коэффициент пропорциональности.
Измеряется в *фарадах*, $[\Phi]$.

Df: ***Ёмкостью*** (*электрической ёмкостью*) конденсатора называется коэффициент пропорциональности между зарядом одной из обкладок и разностью потенциалов между обкладками.

Иначе: емкость конденсатора – это заряд, который нужно передать одной из обкладок конденсатора, чтобы увеличить разность потенциалов на единицу:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} \tag{3.9}$$

Вычислим ***емкость плоского конденсатора***:

$$E = -grad\varphi = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{U}{d}.$$

Причём

$$E = const$$

Отсюда следует, что

$$U = Ed$$

Для плоского конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

Тогда

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} d = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} d = \frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} q,$$

$$U = \frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} q \Rightarrow q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} U.$$

По определению

$$q = CU$$

Следовательно, электрическая ёмкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \tag{3.10}$$

Рассмотрим ***цилиндрический конденсатор***. Напряжённость поля, создаваемая внешней обкладкой, внутри конденсатора будет равна ***0*** *по теореме Гаусса*. Напряжённость поля, создаваемая внутренней обкладкой эквивалентна напряжённости поля нити, расположенной по оси конденсатора (этом можно также доказать с помощью теоремы Гаусса, сделайте это самостоятельно). Тогда поле внутри конденсатора (снаружи цилиндрического конденсатора поле будет отсутствовать по той же причине, что и снаружи плоского конденсатора, однако на вывод в любом случае это влияния не оказывает) будет эквивалентно полю бесконечной заряженной нити:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} \tag{3.11}$$

Разность потенциалов можно вычислить, взяв определённый интеграл в пределах от радиуса одной обкладки до другой:

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} dR = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{R} dR =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln R \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\ln R_2 - \ln R_1 \right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

В итоге имеем выражение для разности потенциалов через линейную плотность заряда:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Подставляя выражение для линейной плотности заряда через заряд Q и высоту конденсатора (длину нити в формуле для напряжённости поля бесконечной заряженной нити) l

$$\tau = \frac{Q}{l},$$

Получаем окончательно (выражение для разности потенциалов через заряд конденсатора):

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Выразим заряд через разность потенциалов:

$$Q = \underbrace{\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}_{C} U .$$

По определению ёмкости конденсатора получим:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \qquad (3.12)$$

Рассмотрим ***сферический конденсатор***. Напряжённость поля, создаваемая внешней обкладкой, внутри конденсатора будет равна ***0*** *по теореме Гаусса*. Напряжённость поля, создаваемая внутренней обкладкой эквивалентна напряжённости поля точечного заряда, расположенного в центре этой сферы (это мы доказывали с помощью теоремы Гаусса). Тогда для напряжённости поля внутри конденсатора получим:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \qquad (3.13)$$

Разность потенциалов найдём, взяв определённый интеграл в пределах от радиуса одной обкладки до другой:

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{R^2}dR =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{R}\bigg|_{R_1}^{R_2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}.$$

Выражение для разности потенциалов через заряд одной из обкладок:

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

Выражение заряда обкладки через разность потенциалов:

$$Q = \underbrace{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}_{C}U.$$

По определению ёмкости электрического конденсатора получим:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1} \tag{3.14}$$

3.3. Энергия проводника и электрического поля. Плотность энергии

Рассмотрим заряженный проводник и представим его, как систему зарядов. Его энергия составит:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i$$

Заряд в заряженном проводнике расположен на поверхности проводника. Разобьем поверхность проводника на бесконечно большое число бесконечно малых площадок, и будем рассматривать каждую из площадок как точечный заряд.

Тогда:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} dq_i\varphi_i.$$

$\forall i, j \qquad \varphi_i = \varphi_j = \varphi$ – так как поверхность проводника есть *эквипотенциальная поверхность*.

Следовательно:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} dq_i\varphi_i = \frac{1}{2}\varphi\sum_{i=1}^{\infty} dq_i = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{\varphi q}{2}.$$

Подставляя выражение величины заряда проводника через ёмкость уединённого проводника и наоборот:

$$q = C\varphi,$$

$$\varphi = \frac{q}{C},$$

Получаем ряд выражений для *энергии заряженного проводника*:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} \qquad (3.15)$$

Рассмотрим конденсатор. Его энергия есть сумма энергий положительной и отрицательной обкладок:

$$W = W_+ + W_- = \frac{q_+\varphi_1}{2} + \frac{q_-\varphi_2}{2} = \frac{q\varphi_1}{2} + \frac{-q\varphi_2}{2} =$$

$$= \frac{q\varphi_1}{2} - \frac{q\varphi_2}{2} = \frac{q}{2}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{qU}{2}.$$

Здесь были учтены следующие соотношения:

$$q = C\Delta\varphi; \Delta\varphi = \frac{q}{C}; q = CU; U = \frac{q}{C}.$$

Подставляя поочерёдно выражение заряда через электрическую ёмкость конденсатора и емкости через заряд, получаем:

$$W_E = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \qquad (3.16)$$

Замечание: $W = \dfrac{CU^2}{2}$ – электрическая составляющая энергии электрического тока (*позднее у нас появится ещё и магнитная составляющая*).

Рассмотрим плоский конденсатор. Заметим, что все поле конденсатора находится внутри конденсатора. E=0.

$$W_E = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \Rightarrow W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S(Ed)^2}{2d} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SdE^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V .$$

Здесь:

S – площадь обкладки,

$\boldsymbol{d}$ – расстояние между ними,

$\boldsymbol{V}$ – объем пространства между обкладками конденсатора.

Мы также учли, что:

$$E = \frac{U}{d},$$

и, следовательно:

$$U = Ed .$$

Окончательно, энергия электростатического поля конденсатора будет определяться следующей формулой:

$$W_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{d} V$$

– энергия однородного электрического поля (*внутри конденсатора*).

Заметим два факта:

1. Поле внутри конденсатора является однородным, т.е. энергия во всех точках равна.
2. Поле сосредоточено внутри конденсатора.

Следовательно, логично говорить об объёмной плотности энергии электрического поля (*внутри конденсатора и вообще, как о физической величине*):

$$w_E = \frac{W_E}{V}$$

– объемная плотность энергии.

Тогда *объёмная плотность энергии электрического поля* будет равна:

$$w_E = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2V}V = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Получим выражение для объёмной плотности энергии электростатического поля:

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (3.17)$$

Подставляя сюда выражение электрического смещения через напряженность электрического поля:

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E,$$

получаем ещё два выражения для плотности энергии:

$$w_E = \frac{ED}{2}, \qquad (3.18)$$

$$w_E = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (3.19)$$

В итоге имеем:

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (3.20)$$

3.4. Электростатическая защита

Вернёмся ненадолго к свойствам заряженного проводника. Дело в том, что для изложения этого материала нам необходимо понятие ёмкости уединённого проводника (в одном из вариантов данного понятия). А оно появилось у нас только в этом разделе. Теперь разберём два варианта понятий, так или иначе подпадающих под понятие *электростатической защиты*.

Первый вариант. И так – что такое статическое электричество (в бытовом понимании)? Это те искорки, «молнии», проскакивающие, когда Вы снимаете синтетическую одежду, тот щелчок тока, который проскакивает, когда Вы берётесь после этого за металлический предмет. Но вопрос прежде всего не в дискомфорте. Статическое электричество может скапливаться не только на Вашем теле, но и на различных предметах, изделиях элементах и иметь достаточно большую величину (досочно большую величину заряда, скопившегося на том или ином предмете). В случае контакта такого, заряженного статически электричеством предмета, скажем, с предметами электронной техники, это может привести к поломки последней. Так может быть, если Вы работаете с электронными компонентами компьютера и имеете на себе заряд статического электричества, Вы можете попросту сжечь микросхему, если прикоснётесь к контактам рукой (ну, скажем, микросхема памяти компьютера).

В чём суть электростатической защиты? Защита может быть обеспечена при помощи ***заземления***. В принципе, речь идёт о проводнике с большой электрической ёмкостью (имеется ввиду *ёмкость уединённого проводника*). Необходимо соединить защищаемый от статического электричества предмет, тело (или даже Ваше тело 😊) с проводником большой ёмкости. Как указывалось выше, потенциал проводника имеет постоянное значение для всего проводника. Таким образом, при соединении нашего тела с проводником, потенциал выравняет по всему проводнику. Но, если ёмкость нашего проводника велика, то результирующий потенциал изменится незначительно. Фактически, накопившийся статический заряд стечёт на наш проводник.

Обычно в качестве такого проводника большой электрической ёмкости берут Землю (ну, или землю). Дело в том, что земля – почва у нас под ногами – является хорошим проводником. А, следовательно всю Землю – нашу планету Земля – можно считать одним большим проводником. Но ёмкость этого проводника очень велика! При этом, хотя заряд Земли имеет небольшое отрицательное значение, потенциал принимается за *ноль* (напомним, потенциал, как и потенциальная энергия, задаются с точностью до аддитивной постоянной, попросту, мы *всегда можем выбрать ноль потенциала*). Таким образом, соединяя предмет посредством заземления с землёй, мы гарантируем, что на этом предмете не будет скапливаться статическое электричество.

Технически заземление представляется собой металлический стержень достаточно большого сечения, уходящий на несколько метров в землю. ГОСТ регламентирует сопротивление этого стержня относительно земли (в смысле, сопротивление между заземляемым предметом и землёй).

Ну и пару слов по поводу, как, в случае необходимости, заземлить Ваше тело. 😊 Собирая, скажем, компьютер, можно, конечно, надеть тонкие резиновые перчатки (это е заземление, а изоляция). Но существуют в продаже и специальные браслеты. Их можно надеть на руку на запястье, а другим концом, прищепкой, соединить с заземлением. Это гарантирует то, что Вы не погубите дорогую технику.

Второй вариант. Так же под электростатической защити понимают помещение защищаемого тела (скажем, защищаемого прибора) внутрь замкнутой проводящей оболочке. Внутри этой оболочки электрическое поле будут отсутствовать. Это следует из того, что поверхность проводника (заряженного, не заряженного, во внешнем поле или нет…) является эквипотенциальной поверхностью. Следовательно, внутри проводящей оболочки по кроям этой области везде потенциал электрического поля будет одинаков. Как результат, в случае если внутри оболочки нет в наличии электрического заряда, поле там будет отсутствовать (независимо от формы этой оболочки). Это приведёт к тому, что помещённое внутрь этой оболочки тело (скажем, прибор, чувствительный к электромагнитным помехам) будет экранирован от внешнего электрического поля.

Я (*я лично*) затрудняюсь уверенно сказать, какое из вышеперечисленных мероприятий правильнее отнести к классу *электростатической защиты*. В Большой Советской Энциклопедии, Физической Энциклопедии, Российской Энциклопедии это понятие отсутствует. Так же его нет в рекомендуемых нами учебниках. В литературе, в интернете имеется на этот счёт масса терминологической путаницы. Для пущей уверенности, отнесём к *электростатической защите* весь комплекс этих мероприятий.

4. Постоянный электрический ток

4.1. Основные определения

Df 1: **Сила тока:**

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{4.1}$$

Сила тока – это физическая величина, численно равная заряду, протекающему через сечение проводника в единицу времени.

Измеряется в *амперах*, $[A] = \frac{[Кл]}{[c]}$. Международное обозначение $[A]$. Это основная единица системы СИ.

Замечание: математически, производная величина протекающего заряда по времени.

Для постоянного тока $I = const$

$$I = \frac{q}{t}$$

Замечание: будем считать силу тока постоянной для временных интервалов, соизмеримых с характерным временем релаксации для электроиндукционных процессов.

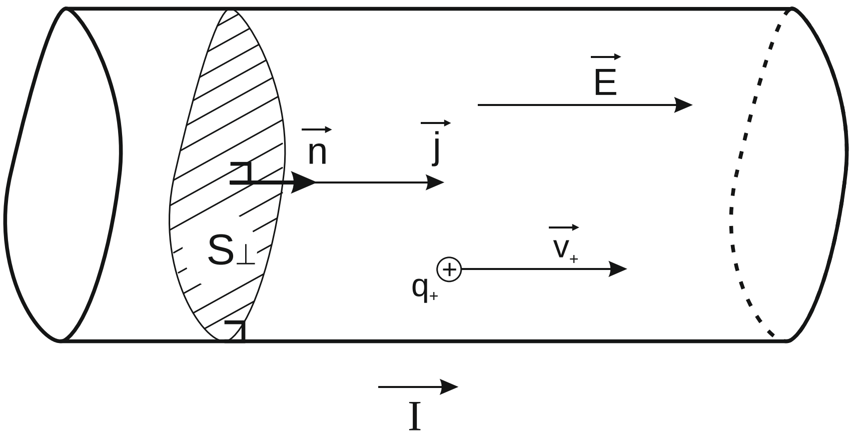


Рисунок 4.1
Плотность тока

Df 2: **Плотность тока**

$$j = \frac{dI}{dS},$$

$$\bar{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}\bar{n}, \tag{4.2}$$

где $|\bar{n}| = 1$,

$S_\perp$ - площадка,

$\bar{n} \parallel \bar{\mathrm{v}}_{носителей\ заряда}$.

$\bar{n}$ сонаправлен с $\bar{\mathrm{v}}_{\oplus}$ $\left(\bar{n} \uparrow\uparrow \bar{\mathrm{v}}_{\oplus}\right)$

Направленное движение заряженных частиц.

Плотность тока численно равна силе тока, протекающего через единичную площадку (плоскость единичной площади) перпендикулярно направлению течения тока. Вектор плотности тока сонаправлен с вектором скорости движения положительных частиц.

Измеряется в *амперах на метр квадратный*, $\left[A/м^2\right] = \dfrac{[A]}{[м]^2}$.

Замечание 1. Вектор плотности тока есть плотность потока для силы тока.

Замечание 2. По физическому смыслу силы тока есть поток для физической величины – заряд. Как и для любой плотности потока, сила тока равна интегралу потока от своей плотности:

$$I = \int_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} .$$

Df 3. **Разность потенциалов** на отрезке проводника есть разность значения потенциалов на концах отрезка этого проводника:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Выше мы ввели два определения потенциала (одно из низ, любое, можно использовать, как определение, второе – как необходимое и достаточное условия):

$$\varphi = \frac{W}{q},$$

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} \qquad (4.3)$$

В данном случае удобно использовать определение (выражение (4.3)).

Тогда:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1\infty}}{q} - \frac{A_{2\infty}}{q} = \frac{A_{1\infty} - A_{2\infty}}{q} = \frac{A_{12}}{q}$$

Таким образом, разность потенциалов на отрезке проводника есть работа электростатических сил по перемещению единичного положительного заряда на этом отрезке проводника.

Df 4. **Сторонние силы**

Сторонние силы – все силы, действующие на заряженные частицы кроме электростатических.

***Замечание*:** сторонние силы – те силы, которые создают электростатическое поле, создают разность потенциалов.

***Df* 5. Однородный и неоднородный участки цепи**

Однородный участок цепи – участок цепи, на котором отсутствуют сторонние силы.

Неоднородный участок цепи – участок цепи, на котором присутствуют сторонние силы.

***Df* 6. ЭДС:**

ЭДС – электродвижущая сила

$$\varepsilon = \frac{A^*}{q}. \tag{4.4}$$

ЭДС – это работа сторонних сил по перемещению единичного заряда (на участке цепи, в замкнутой цепи).

Измеряется в *вольта*, $[B]$. Международное обозначение $[V]$.∞

Замечание: здесь и дальше верхним индексом «*звёздочка*» (*) будем обозначать величины, относящиеся к сторонним силам.

***Df 7:* Напряжение на участке цепи**

Напряжение на участке цепи – это сумма разности потенциалов и ЭДС на этом участке цепи.

$$U = \Delta\varphi + \varepsilon = \frac{A_{12}}{q} + \frac{A_{12}^*}{q} = \frac{A_{12} + A_{12}^*}{q} \tag{4.5}$$

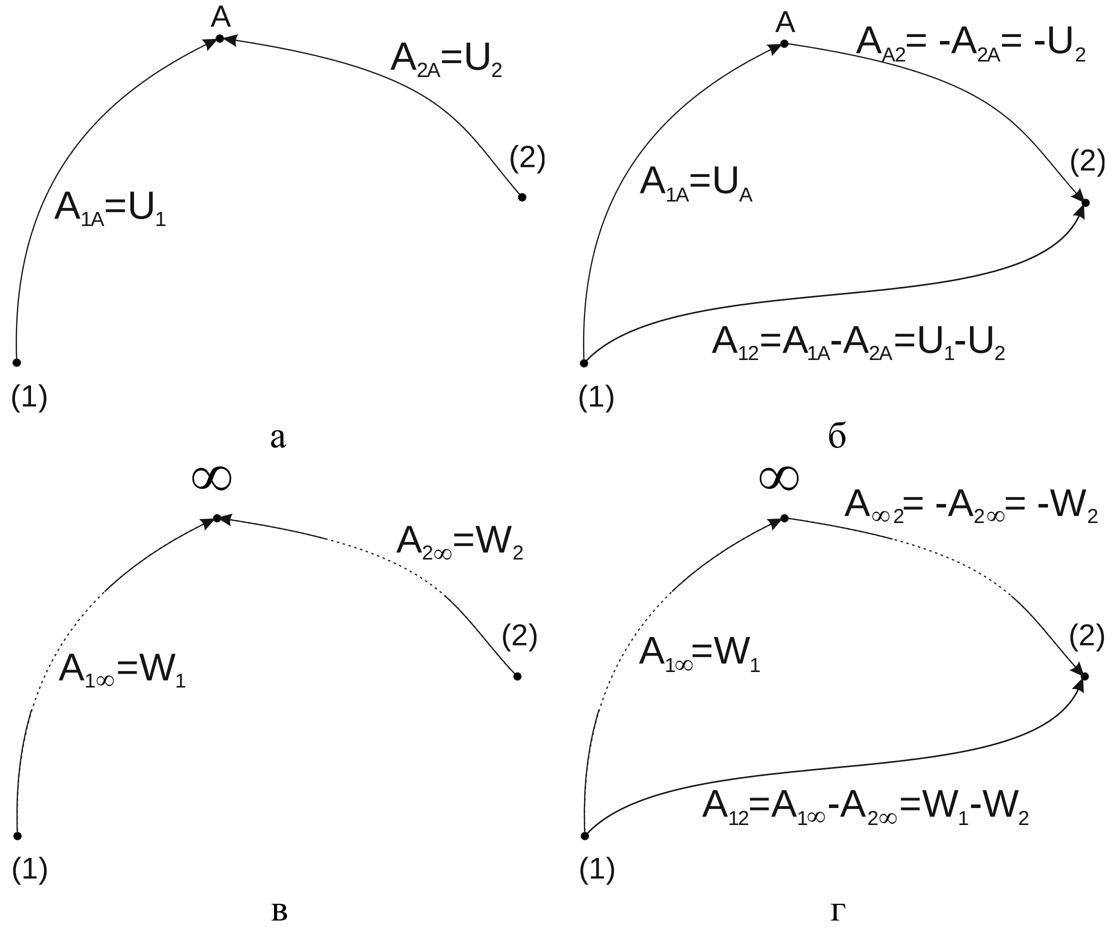


Рисунок 4.2

Работа потенциальных сил по перемещению заряда

а. Определение потенциальной энергии ***U*** в механики
б. Выражение работы через потенциальную энергию ***U*** (*механика*)
в. Потенциальная энергия ***W*** в электромагнетизме
г. Выражение работы через потенциальную энергию ***W***

Замечание 1: т.о. напряжение – суммарная работа электростатических и сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда на участке цепи.

Замечание 2: для однородного участка цепи напряжение совпадает с разностью потенциалов.

4.2. Уравнение непрерывности

Из определения плотности тока и потока имеем:

$$\bar{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}\bar{n} \Rightarrow I = \int_{l_1} \bar{j}\cdot\bar{n}\; dS = \int_{l_1} \bar{j}\cdot d\bar{S}\,.$$

Учитывая определение силы тока, как первой производной от заряда по времени (*скорость течения или скорость убыли*):

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \int_{l_1} \bar{j}\cdot d\bar{S}$$

При наличии электрической ёмкости (*конденсатора*) для интеграла по замкнутой поверхности (*учитывая закон сохранения заряда*):

$$\oint_{l_1} \overline{j} \cdot d\overline{S} = -\frac{dq}{dt}. \tag{4.6}$$

Поток плотности тока через замкнутую поверхность равен скорости *убыли/прибыли* заряда внутри этой поверхности с обратным знаком. В случае нормального процесса течения тока количество заряда, втёкшее внутрь замкнутой поверхности с одной стороны, будет равно количеству заряда, вытекшего с другой. Сколько заряда вытечет из замкнутой поверхности во все стороны? Ровно столько, на сколько его уменьшится внутри этой области (*скорость уменьшения заряда конденсатора*).

По теореме Стокса получаем *дифференциальную форму уравнения непрерывности:*

$$\operatorname{div} j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{4.7}$$

В отсутствии электрической ёмкости (*конденсатора*):

$$C = 0 \Rightarrow q = const, \ \frac{dq}{dt} = 0$$

– производная заряда по времени равна нулю. Следовательно, нулю равна правая часть выражения:

$$\oint_{l_1} \overline{j} \cdot d\overline{S} = 0, \tag{4.8}$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \overline{j} = 0. \tag{4.9}$$

4.3. Закон Ома

4.3.1. Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}. \tag{4.10}$$

Сила тока на участке цепи *пропорциональна напряжению* на этом участке *с коэффициентом пропорциональности*, равным *обратной величине сопротивления*.

Здесь

$\frac{1}{R}$ – коэффициент пропорциональности,

R – электрическое сопротивление.

Замечание 1: экспериментальный факт.

Замечание 2: в данном случае, понятие *напряжения* эквивалентно понятию *разности потенциалов*.

Сопротивление.

Сопротивление зависит от материала проводника. Сопротивление прямо пропорционально длине ℓ и обратно пропорционально площади поперечного сечения $\boldsymbol{S}$:

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{l}{\sigma S}. \tag{4.11}$$

Здесь

ρ – удельное сопротивление, $[Ом][м]$,

$\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ – удельная проводимость, $\dfrac{1}{[Ом][м]}$.

4.3.2. Закон Ома в дифференциальной форме

Рассмотрим элемент проводника (*объём, кусочек проводника элементарной длины и элементарной площади поперечного сечения*):

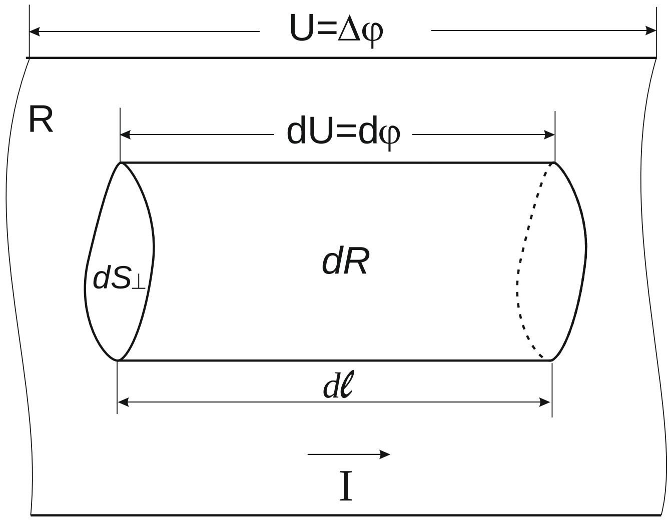


Рисунок 4.3

Элементарный участок цепи

Разность потенциалов на его концах будет также элементарной величиной $\boldsymbol{d\varphi}$.

Запишем закон Ома и формулу зависимости сопротивления от длины и площади поперечного сечения для этих элементарных величин:

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow dI = \frac{dU}{dR},$$

$$R = \frac{\rho l}{S} \Rightarrow dR = \frac{\rho dl}{dS}.$$

Подставим одно в другое:

$$dI = \frac{dU}{dR} = \frac{dUdS}{\rho dl}.$$

Поделим правую и левую часть на площадь:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dU}{dl}\frac{1}{\rho}.$$

Учтём, что площадка, выбранная нами, перпендикулярна направлению течения тока:

$$dS \sim dS_{\perp},$$

$$\frac{dI}{dS_{\perp}} = \frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}.$$

В левой части по определению имеем скалярное значение плотности тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}},$$

$$j = \frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}.$$

Учтём тот факт, что величина, обратная удельному сопротивлению есть удельная проводимость:

$$\sigma = \frac{1}{\rho},$$

$$j = \sigma\frac{dU}{dl}.$$

В правой части нашего выражения стоит производная потенциала по направлению. Но мы знаем, что *производная скалярной функции по направлению* равна проекции градиента на это направление и абсолютному значению самого градиента, если эти это направление совпадает с направлением градиента. Именно так и есть в нашем случае, так как и градиент потенциала и выбранное нами направление перпендикулярны площадки и параллельны снекам проводника. Учитывая, что градиент потенциала равен с обратным знаком вектору напряжённости электростатического поля, имеем:

$$\bar{E} = -grad\varphi,$$

$$E = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{dU}{dl},$$

$$\bar{l} - \uparrow\uparrow -grad\varphi,$$

$$j = \sigma E\ .$$

Теперь, учитывая, что вектор плотности тока направлен по направлению скорости движения положительных зарядов, а те в свою очередь движутся в направлении вектора напряжённости электрического поля:

$$\bar{j} \uparrow\uparrow \bar{V}_{\oplus} \left(определение\right),$$

$$\bar{V}_{\oplus} \uparrow\uparrow \bar{E} \Rightarrow j \uparrow\uparrow \bar{E}\ ,$$

получаем, что данное выражение будет справедливо и в векторной форме:

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}\ .$$

В итоге, получила ***закон Ома*** *для однородного участка цепи в* ***дифференциальной форме***:

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}\ . \tag{4.12}$$

Вектор плотности тока пропорционален *вектору напряжения электростатического поля* с коэффициентом пропорциональности удельная проводимость.

4.3.3. Закон Ома для неоднородного участка цепи (общий закон Ома)

Дифференциальная форма.

Пусть:

$\bar{F} = \bar{F}_{электростатические}$ – сила, действующая со стороны электростатического поля на заряженную частицу.

Вспомним, *по определению*:

$\bar{E} = \dfrac{\bar{F}}{q}$ – напряжение *электростатического* поля.

Кроме того:

$\bar{F}^*$ – сторонняя сила (*равнодействующая сторонних сил*).

Введем понятие *напряжения поля сторонних сил*:

$\bar{E}^* = \dfrac{\bar{F}^*}{q}$ – напряжение сторонних сил.

Замечание. В дальнейшем мы поймём, что в большинстве случаев под сторонними силами мы будем понимать силы электроиндукционной природа:

$\bar{F}^*$ *– сила электромагнитной индукции*.

Поскольку для однородного участка цепи вектор плотности тока пропорционален напряженности поля электростатических сил, логично предположить, что для неоднородного участка цепи плотность тока будет пропорциональна сумме напряженностей электростатического поля и поля сторонних сил.

Тогда имеем закон Ома для неоднородного участка цепи в дифференциальной форме:

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}^*) . \qquad (4.13)$$

Интегральная форма.

Преобразуем последнее уравнение. Помножим его скалярно на вектор элементарной площадки перпендикулярной вектору плотности тока площадки (*и, следовательно, сонаправленному с вектором, параллельным проводнику и вектором плотности тока*):

$$\bar{j} \cdot d\bar{S} = \sigma\left(\bar{E} + \bar{E}^*\right) \cdot d\bar{S} .$$

Умножим и разделим правую часть на элементарную длину проводника:

$$\bar{j} \cdot d\bar{S} = \frac{\sigma\left(\bar{E} + \bar{E}^*\right) \cdot d\bar{S}}{dl} dl .$$

Теперь внесём скалярную величину элементарной длины проводника, как числовой коэффициент при векторе элементарной ориентированной поверхности:

$$\bar{j} \cdot d\bar{S} = \frac{\sigma\left(\bar{E} + \bar{E}^*\right) \cdot \left(dl d\bar{S}\right)}{dl} .$$

Вспомним понятие элементарного вектора ориентированной поверхности:

$$d\bar{S} = dS_{\perp} \bar{n} ,$$

и заметим, что этот вектор параллелен (*и сонаправлен*) элементарному вектору касательной к проводнику:

$$d\bar{l} \perp dS_{\perp} \Rightarrow d\bar{l} \parallel d\bar{S} = dS \, \bar{n} .$$

Тогда значок вектора мы можем переставить с вектора $d\bar{S}$ на вектор $d\bar{l}$:

$$\bar{j} \cdot d\bar{S} = \frac{\sigma\left(\bar{E} + \bar{E}^*\right) \cdot \left(dS d\bar{l}\right)}{dl} .$$

Сгруппируем сомножители, которые после интегрирования дадут нам сопротивление участка проводника:

$$\bar{j} \cdot d\bar{S} = \frac{\sigma}{dl} dS \left(\bar{E} + \bar{E}^*\right) \cdot d\bar{l} .$$

Заменим, также, удельную проводимость на обратное значение удельного сопротивления:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Получим:

$$\bar{j} \cdot d\bar{S} = \frac{dS}{\rho dl}\left(\bar{E} + \bar{E}^*\right) \cdot d\bar{l}\ .$$

Теперь проинтегрируем сначала по площади поперечного сечения проводника:

$$\underbrace{\int\limits_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S}}_{I} = \underbrace{\int\limits_{S_1} dS}_{S} \cdot \frac{1}{\rho dl}(\bar{E} + \bar{E}^*) \cdot d\bar{l}\ .$$

И вспомним выражение силы тока через плотность тока (*как потока векторного поля*):

$$I = \int\limits_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S}\ .$$

Получим:

$$I = S\,\frac{1}{\rho dl}(\bar{E} + \bar{E}^*) \cdot d\bar{l}\ .$$

Раскроем скобки

$$I\,\frac{\rho dl}{S} = \bar{E} \cdot d\bar{l} + \bar{E}^* \cdot d\bar{l}$$

и проинтегрируем по длине проводника:

$$I \cdot \underbrace{\int\limits_{l_1} \frac{\rho}{S} dl}_{R} = \int\limits_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} + \int\limits_{l_1} \bar{E}^* \cdot d\bar{l} \tag{4.14}$$

Запомним это уравнение. Оно понадобится нам дальше для вывода закона Ома для полной (*замкнутой*) цепи.

В правой части заменим элементарный вектор касательной к длине кривой на эквивалентный ему вектор элементарного перемещения:

$$d\bar{l} \equiv d\bar{r}\ ,$$

а напряженность электростатического поля и поля сторонних сил заменим (*по определению*) на отношение силы к заряду:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q},$$

$$\bar{E}^* = \frac{\bar{F}^*}{q}.$$

Получим:

$$IR = \int_{l_1} \frac{\bar{F}}{q} \cdot d\bar{r} + \int_{l_1} \frac{\bar{F}^*}{q} \cdot d\bar{r}.$$

Вынесем заряд из-под интеграла и заметим, что полученные интегралы есть работа электростатических и сторонних сил на этом участке цепи:

$$IR = \frac{1}{q} \underbrace{\int_{l_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}}_{A} + \frac{1}{q} \underbrace{\int_{l_1} \bar{F}^* \cdot d\bar{r}}_{A^*},$$

$$IR = \underbrace{\frac{A_{12}}{q}}_{\Delta\varphi} + \underbrace{\frac{A_{12}^*}{q}}_{\varepsilon}.$$

Теперь заменим работу электростатических сил по перемещению единичного положительного заряда на разность потенциалов, а работу сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда – на ЭДС.

Получим:

$$IR = \underbrace{\Delta\varphi + \varepsilon}_{U}.$$

Величина в правой части есть напряжение на неоднородном участке цепи (*по определению*):

$$IR = U.$$

Или, в привычной форме:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{4.15}$$

Упрощенный вариант *доказательства*:

Перейдём от элементарных величин к конечным:

$$dS \to S,$$

$$dl \to l$$

и запишем силу тока, как произведение плотности тока на площадь поперечного сечения:

$$jS = I\ .$$

Тогда

$$j = \sigma\left(E + E^*\right) \Rightarrow I = jS = \frac{S}{\rho}\left(E + E^*\right).$$

Умножим и поделим правую часть на длину:

$$I = \frac{S}{\rho l}\left(E + E^*\right)l$$

Вспомним зависимость сопротивления от длины и площади поперечного сечения проводника:

$$R = \frac{\rho l}{S} \Rightarrow \frac{S}{\rho l} = \frac{1}{R},$$

и преобразуем последнее выражение:

$$I = \frac{S}{\rho l}\left(E + E^*\right)l = \frac{1}{R}\left(El + E^*l\right).$$

$$\frac{1}{R}$$

$$IR = El + E^*l$$

Вспомним соотношение разности потенциалов и напряжённости электростатического поля в случае поля однородного поля:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{l} \Rightarrow El = \Delta\varphi\ .$$

И распространим последнее и на сторонни силы:

$$E^*l = \varepsilon\ .$$

Это можно пояснить через работу по перемещению единичного положительного заряда на участке цепи:

$$El = \frac{F}{q}l = \frac{Fl}{q} = \frac{A_{12}}{q} = \Delta\varphi,$$

$$E^*l = \frac{F^*}{q}l = \frac{A^*_{12}}{q} = \varepsilon\ .$$

Тогда:

$$IR = El + E^*l = \Delta\varphi + \varepsilon\ .$$

Теперь вспомним определение напряжения на участке цепи, как суммы разности потенциалов и ЭДС на этом участке:

$$IR = \underbrace{\Delta\varphi + \varepsilon}_{U}.$$

В результате получили:

$$IR = U,$$

или

$$I = \frac{U}{R}.$$

Мы получили ***Закон Ома*** в *интегральной форме* для *неоднородного участка цепи*:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Замечание: в данном случае под напряжением на участке цепи мы понимаем сумму разности потенциалов и ЭДС:

$$U = \Delta\varphi + \varepsilon.$$

4.3.4. Закон Ома для полной (замкнутой) цепи

Вернёмся к уравнению, помеченному, как (4.14):

$$I\int\limits_{l_1}\frac{\rho}{S}dl = \int\limits_{l_1}\bar{E}d\bar{l} + \int\limits_{l_1}\bar{E}^{*}d\bar{l}.$$

Но теперь будем интегрировать не просто по кривой, а по замкнутому контуру:

$l_1 \equiv \bigcirc$ –замкнутый контур!

Тогда:

$$I\oint\frac{\rho}{S}dl = \underbrace{\oint\bar{E}\cdot d\bar{l}}_{0} + \oint\bar{E}^{*}\cdot d\bar{l}.$$

Учтём, что циркуляция электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю и, также, разобьём в левой части наш контур на два, соответствующих однородному и неоднородному участкам:

$$I\left(\underbrace{\int\limits_{l_1}\frac{\rho}{S}dl}_{R} + \underbrace{\int\limits_{l_2}\frac{\rho}{S}dl}_{r}\right) = \frac{1}{q}\oint\bar{F}^{*}d\bar{r},$$

$$l_1 + l_2 = \bigcirc.$$

Здесь

l_1 – однородный участок,

l_2 – неоднородный участок.

Тогда *в левой части* имеем:

$$\int\limits_{l_1} \frac{\rho}{S} dl = R$$ – внешнее сопротивление,

$$\int\limits_{l_2} \frac{\rho}{S} dl = r$$ – внутреннее сопротивление.

Подставляя, получим:

$$I\left(\int\limits_{l_1} \frac{\rho}{S} dl + \int\limits_{l_2} \frac{\rho}{S} dl \right) = I\left(R + r\right).$$

С другой стороны, *в правой части* имеем:

$$\frac{1}{q} \oint \bar{F}^* dr = \frac{1}{q} A^* = \varepsilon.$$

В итоге

$$I\left(R + r\right) = \varepsilon.$$

Получили ***закон Ома для полной*** или ***замкнутой цепи***:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \tag{4.16}$$

В *полной* или *замкнутой цепи сила тока пропорциональна* суммарной *ЭДС* с коэффициентом пропорциональности:

$$\frac{1}{R + r},$$

где

R – внешнее сопротивление (*то есть, сопротивление на внешнем участке цепи*),

r – внутреннее сопротивление (*то есть сопротивление внутри источника питания*).

4.4. Расчёт электрических цепей

4.4.1. Последовательное и параллельное соединение

Последовательное соединение:

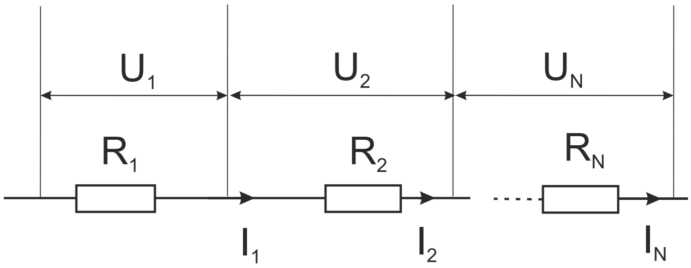


Рисунок 4.4

Последовательное соединение проводников

Напряжение, сила тока и сопротивление участка цепи вычисляется следующим образом:

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i ,$$

$$\forall i : I = I_i ,$$

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i .$$

Параллельное соединение:

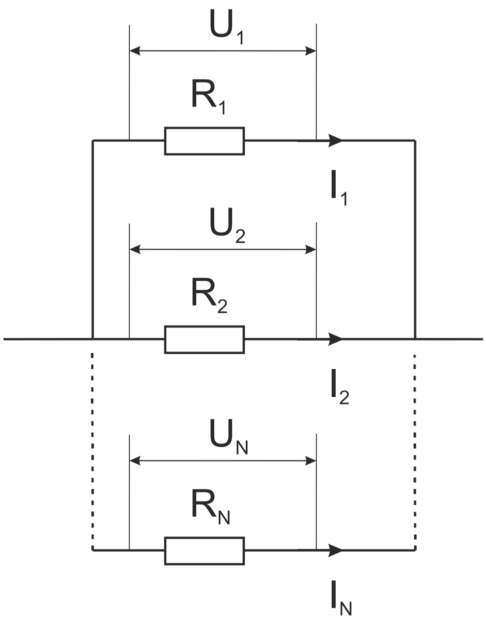


Рисунок 4.5

Последовательное соединение проводников

Напряжение, сила тока и сопротивление участка цепи вычисляется следующим образом:

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i \ ,$$

$$\forall i : U = U_i \ ,$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} \ .$$

В случае соединения двух проводников:

$$N = 2 \Rightarrow R = \frac{R_1 R_1}{R_1 + R_1} \ .$$

4.4.2. Правила Кирхгоффа

В ряде случаев законы Ома, применяемые к замкнутой цепи или отдельным её участкам, удобно заменить на два правила Кирхгоффа, позволяющие написать полную систему уравнений (*относительно сил тока протекающих на отдельных участках*), которая легко затем решается, скажем, с применением метода Гаусса для решения систем линейных уравнений..

Df 1. Узлом называется точка, где сходятся 3-и и более проводника.

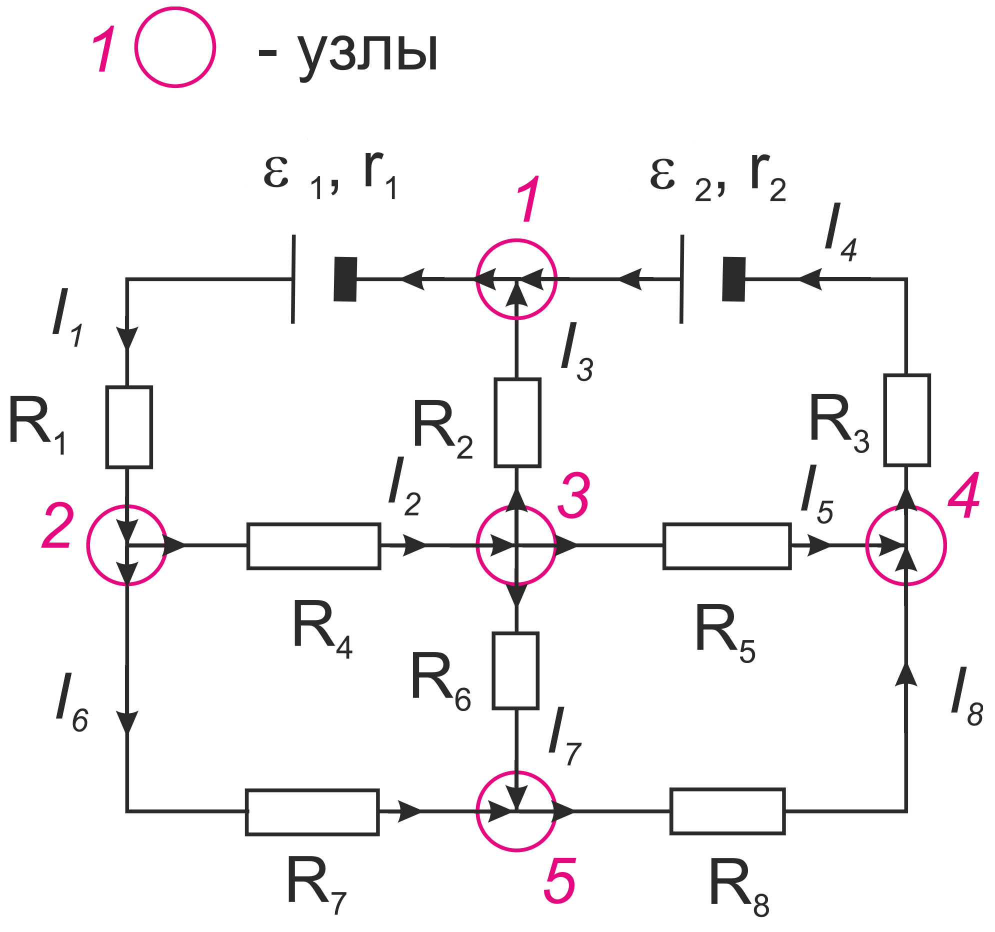


Рисунок 4.6

Узлы в электрической цепи

Df 2. Контуром называется любой замкнутый обход цепи по ряду её участков.

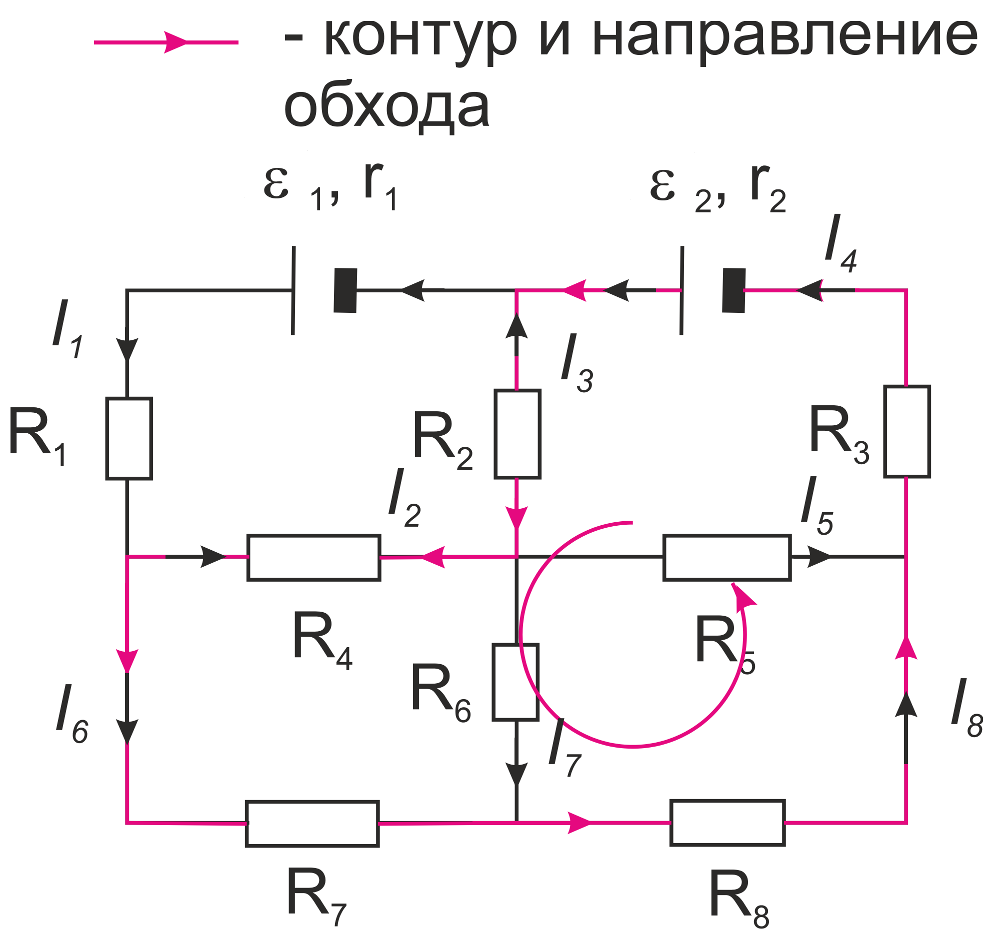


Рисунок 4.7
Контур в электрической цепи.
Малиновым цветом обозначен контур – $\boldsymbol{I_4}$-$\boldsymbol{I_3}$-$\boldsymbol{I_2}$-$\boldsymbol{I_6}$-$\boldsymbol{I_8}$

I правило. Сумма токов, сходящихся в узле, равна 0 (*нулю*). При этом втекающие токи надо брать со знаком «+» (*плюс*), а вытекающие со знаком « – » (*минус*). По этому правилу надо записать ***N-1*** уравнений, где ***N*** – общее число узлов. ***N***-е уравнение будет линейно-зависимо. Правило следует из уравнения непрерывности.

$$\sum_{j=1}^{M} I_j = 0. \tag{4.17}$$

II правило. Сумма произведений силы тока на сопротивление на каждом участке при его обходе равно сумме ЭДС, встречающихся при обходе данного контура. При этом произведение силы тока на сопротивление берётся со знаком «+» (*плюс*), если выбранное при написании первого правила направление течения тока совпадает с направлением обхода, и « – » (*минус*), если оно противоположно направлению обхода. При этом необходимо учитывать, *как внешние, так и внутренние сопротивления* участков цепи. При суммировании ЭДС, слагаемое берётся со знаком «+» (*плюс*), если создаваемый им электрический ток совпадает по направлению с направлением обхода контура и со знаком « – » (*минус*), если оно противоположно выбранному направлению обхода. Таким образом надо написать ***N-1*** уравнений, где ***N*** – общее число контуров, либо до полной системы уравнений (*общее число уравнений по первому и второму правилу должно быть **N**, где **N** – число искомых значений силы тока*):

$$\sum_{j=1}^{M_1} R_j I_j = \sum_{j=1}^{M_2} \varepsilon_j \,. \qquad (4.18)$$

По *I правилу* имеем:

$$-I_1 + I_3 + I_4 = 0 \quad (1),$$

$$I_1 - I_2 - I_6 = 0 \quad (2),$$

$$I_2 - I_3 - I_5 - I_7 = 0 \quad (3),$$

$$I_5 - I_4 + I_8 = 0 \quad (4).$$

На схеме всего 5 узлов. Следовательно, линейно-независимых уравнений мы должны написать 4-и штуки. Последнее, 5-е уравнение будет линейной комбинацией предыдущих 4-х (*предлагаем проверить это самостоятельно*):

$$I_6 + I_7 - I_8 = 0 \quad (5).$$

Хотя из списка, в принципе, можно вместо него выкинуть любое другое уравнение.

По *II правилу* в целях экономии времени запишем только одно уравнение для обозначенного контура, хотя всего их надо записать 8 штук (8 неизвестных токов – 4 уже записанные уравнения = 4). *Имеем*:

$$\left(R_3 + r_2\right) I_4 - R_2 I_3 - R_4 I_2 + R_7 I_6 + R_8 I_8 = \varepsilon_2 \,.$$

И последнее. Поясним два замечания на простых примерах.

Линейная зависимость последнего уравнения. Рассмотрим простейшую схему с двумя узлами:

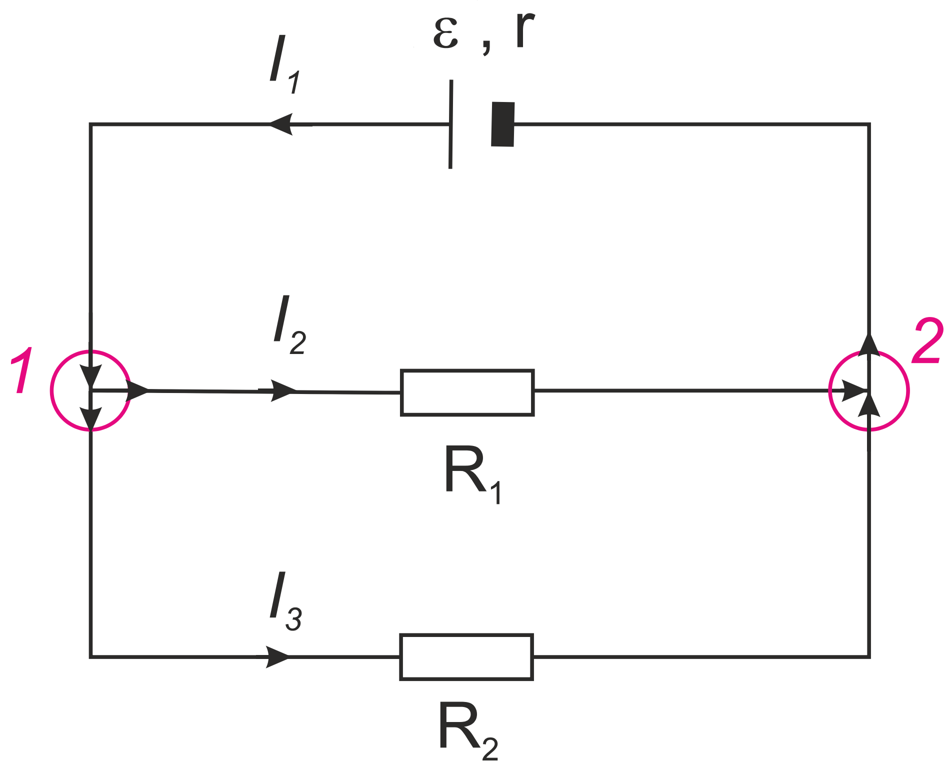


Рисунок 4.8
Пример линейной зависимости ***N***-ого уравнения

и запишем уравнения *по I правилу* для обоих узлов:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Очевидно, что *второе уравнение* есть *первое уравнение*, умноженное на «*–1*» (*минус единицу*).

Необходимость учитывать внутреннее сопротивление. Схема состоит из одного контура:

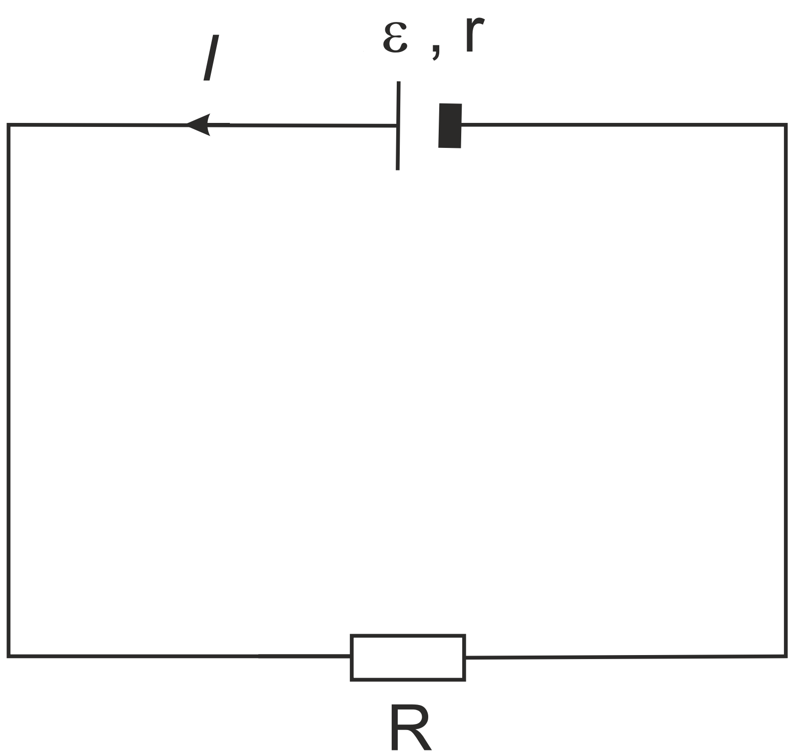


Рисунок 4.9

Закон Ома для замкнутой цепи с точки зрения законов Кирхгофа

Запишем уравнение по *II правилу* (*направление обхода против часовой стрелки*):

$$\left(R+r\right)I=\varepsilon .$$

Разделим обе части на $R+r$. Получим *закон Ома для полной* (*замкнутой*) *цепи*:

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}.$$

4.5. Закон Джоуля – Ленца. Работа электрического тока

4.5.1. 1Закон Джоуля – Ленца

Закон Джоуля-Ленца:

$$Q=I^2Rt. \tag{4.19}$$

Теплота, выделяющаяся при протекании электрического тока пропорциональна квадрату силы тока и сопротивлению участка цепи.

Замечание: закон был открыт экспериментально.

Дифференциальная форма. Воспользуемся той же схемой, что и при выводе закона Ома в Дифференциальной форме.

Первый вариант. Рассмотрим стандартное выражение закона Джоуля-Ленца:

$$Q=I^2Rt,$$

и перейдём к бесконечно малому объёму проводника:

$$dQ = \left(dI\right)^2 dRdt .$$

Вспомнив выражение для сопротивления через удельное сопротивление:

$$R = \frac{\rho l}{S} \Rightarrow dR = \frac{\rho dl}{dS}$$

и выражение для силы тока через плотность тока:

$$j = \frac{dI}{dS} \Rightarrow dI = jdS ,$$

подставим их в полученную формулу:

$$dQ = \left(dI\right)^2 dR\, dt = \left(jdS\right)^2 \underbrace{\frac{\rho dl}{dS}}_{dR} dt = j^2 \left(dS\right)^{\cancel{2}} \frac{\rho dl}{\cancel{dS}} dt =$$

$$= j^2 dS \rho\, dl\, dt = \rho j^2 \underbrace{dl \cdot dS}_{dV} dt = \rho j^2 dVdt .$$

Поделим правую и левую часть на элементарный объём и элементарный промежуток времени. Введём понятие объёмной плотности выделяемой энергии (*теплоты*), как теплоты (*или энергии*), выделяемой из единицы объёма в единицу времени:

$$\underbrace{\frac{dQ}{dVdt}}_{w} = \rho j^2 ,$$

и придём к окончательному результату:

$$w = \rho j^2 .$$

Вспомнив, что квадрат плотности тока есть скалярный квадрат вектора плотности тока, можем записать окончательны вариант, как:

$$w = \rho \bar{j}^2$$

Второй вариант. Используя закон Ома, перепишем закон Джоуля-Ленца через силу тока и напряжение:

$$Q = I^2 Rt = IUt .$$

Перейдём к дифференциальной форме:

$$dQ = dI\ dU\ dt ,$$

а затем поделим правую и левую часть на элементарный промежуток времени:

$$\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{dW} = \underbrace{jdS}_{dI} \cdot \underbrace{Edx}_{dU} .$$

Справа мы получили элементарную энергию, выделяемую образцом (*проводником*) за единицу времени, слева произведение плотности тока на напряжённость электрического поля и элементарный объём:

$$dW = jE\,\underbrace{dSdx}_{dV}.$$

Вспомнив выражение для закона Ома в дифференциальной форме, получаем окончательный вариант:

$$j = \sigma E,$$

$$\underbrace{\frac{dW}{dV}}_{w} = \sigma E \cdot E,$$

$$w = \sigma E^2,$$

$$w = \sigma \bar{E}^2.$$

Окончательно имеем два выражения для закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \rho \bar{j}^2, \tag{4.20}$$

$$w = \sigma \bar{E}^2, \tag{4.21}$$

где w – удельная тепловая мощность тока, измеряется в *ваттах на метр кубический*, $\left[Вт/м^3\right] = \frac{[Вт]}{[м]^3}$.

4.5.2. Работа и мощность электрического тока

Работа.

Работа есть изменение потенциальной энергии, которая, в свою очередь, может быть представлена, как произведение потенциала на величину заряда, перемещаемого на этом участке (*из определения потенциала*):

$$A = \Delta W = W_1 - W_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi = IUt.$$

Здесь мы учли следующие соотношения:
связь потенциальной энергии и потенциала:

$$\varphi = \frac{W}{q} \Rightarrow W = q\varphi,$$

связь разности потенциалов и напряжения для однородного участка цепи:

$$\Delta\varphi = U,$$

связь силы тока и протекшего за промежуток времени заряда (*из определения силы тока*):

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = It.$$

Заменяя поочерёдно силу тока и напряжение через закон Ома

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow U = IR$$

получаем:

$$A = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t \,. \qquad (4.22)$$

Очевидно, что это выражение совпадает с *законом Джоуля – Ленца*. Таким образом, всё выделяющееся при протекании электрического тока тепло выделяется за счёт работы, производимой электрическим током *(работы, производимой при движении заряженных частиц по проводнику*).

$$I = \frac{U}{R}; U = IR$$

Замечание: для однородного участка цепи, на котором отсутствуют электроиндуктивные процессы (лампочка), вся совершаемая током работа идет на выделение тепла.

Мощность.

$$P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} \,. \qquad (4.23)$$

Df1. *Полная мощность* – мощность, выделяемая во всей цепи, как во внешней, так и внутри источника питания:

$$P_0 = I\varepsilon = I^2 \left(R + r\right) = \frac{\varepsilon^2}{\left(R + r\right)} \,. \qquad (4.24)$$

Df2. *Полезная мощность* – мощность, выделяемая только во внешней цепи:

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} \,. \qquad (4.25)$$

Используя закон Ома зля полной (*замкнутой*) цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \,,$$

получаем:

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{\left(R + r\right)^2} \,. \qquad (4.26)$$

Df2. *КПД* – отношение полезной мощности к полной:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{\cancel{I^2} R}{\cancel{I^2}\left(R+r\right)} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+\dfrac{r}{R}}. \qquad (4.27)$$

КПД достигает максимального значения в режиме холостого хода $\left(I=0, R\to\infty\right)$. Но в этом режиме полезная мощность равна нулю – работа не полезная совершается. Максимум полной мощности достигается в режиме короткого замыкания $\left(I\to\infty, R=0\right)$. Но при этом полезная мощность так же равна нулю. Оптимальным, таким образом, для функционирования электрической схемы является режима максимальной полезной мощности.

При этом

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{\left(R\right)'\left(R+r\right)^2 - R\left(\left(R+r\right)^2\right)'}{\left(\left(R+r\right)^2\right)^2} = \frac{1\cdot\left(R+r\right)^2 - R\cdot 2\left(R+r\right)\cdot 1}{\left(R+r\right)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{R^2} + \cancel{2Rr} + r^2 - \cancel{2}R^2 - \cancel{2Rr}}{\left(R+r\right)^4} = \frac{r^2 - R^2}{\left(R+r\right)^4},$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow r^2 - R^2 = 0, R+r \neq 0.$$

$$r = R. \qquad (4.28)$$

Максимальной эффективностью для функционирования электрической схемы, таким образом, является *режим максимальной полезной мощности*, при котором максимум энергии выделяется во внешней цепи. Этот режим наступает, когда внешнее сопротивление становится равным значению внутреннего сопротивления.

4.6. Зависимость сопротивления от температуры

Сопротивление любого проводника зависит от внешних условий и в первую очередь от температуры. У металлов оно возрастает при нагревании, у электролитов и полупроводников – уменьшается. Уменьшение сопротивления с ростом температуры у полупроводников объясняется, в первую очередь, увеличением количества носителей зарядов (количество дырок в полупроводнике и ионов в растворе электролита растёт с ростом температуры, а общее их количество, всё же, мало по сравнению с количеством электронов в металле). В электролите, также, увеличивается подвижность ионов, что весьма важно для увеличения проводимости.

Что касается металлов, то с ростом температуры увеличивается скорость хаотического движения электронов, как электронного газа. При этом скорость их упорядоченного движения остаётся постоянной (*средняя скорость* *хаотического движения электронов при 300 К составляет приблизительно* 10^5 *м/с, а средняя скорость их упорядоченного движения* 10^{-3} *м/с – 8 порядков разницы!!!*). Как следствие, уменьшаются длина и время свободного пробега электрона. Частица не успевает разогнаться под действием электрического поля. Причём, здесь надо учесть, что, поскольку направление движения электрона после соударения произвольно, можно считать, что при этом он теряет всю свою скорость упорядоченного движения, как носителя заряда в процессе протекания электрического тока.

Опыт показывает, что электрическое сопротивление металлических проводников в первом приближении линейно возрастает с температурой по закону

$$R_t = R_0\left(1+\alpha t\right), \tag{4.29}$$

где $\boldsymbol{R_0}$ и $\boldsymbol{R_t}$ – значения сопротивления при 0°С и при температуре $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{\alpha}$ – температурный коэффициент сопротивления, разный для различных металлов. Для чистых металлов $\boldsymbol{\alpha}$ близок к $\frac{1}{273}\,1/\textit{градус}$.

Обратите внимание, что, если подставить в данное выражение вместо температуры в °С термодинамическую температуру $\left(t \approx T - 273\right)$, *выражение примет вид прямой пропорциональности (если по оси абсцисс отложить термодинамическую температуру) – прямая, выходящая из абсолютного нуля.*

Литература

Основная литература

1.
   a. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5-ти т. Том 2. Электричество и магнетизм — М,СПб: Лань, 2011.
   b. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х т. Том 2. Электричество и магнетизм, волны, оптика — М,СПб: Лань, ~2011
2. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2014.

Дополнительная литература

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие в 5-и томах. Т. 3. Электромагнетизм. — М: …, 2014.
4. Савельев И.В. Основы теоретической физики. В 2-х т. Том 1. Механика и электродинамика — М: «Наука», 1991.
5. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. — М: «Высшая школа», 1990.
6. Измайлов С.В. Курс электродинамики. — М: «Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР», 1962

Осташев Владимир Борисович

Учёная степень: кандидат технических наук
Учёное звание: доцент
Должность: доцент кафедры общей физики СПбГТИ(ТУ)

Личный сайт:

http://ostashevvb.spb.ru

Вкладки:

«В помощь детям» – конспекты лекций, методические материалы, вопросы к экзамену

«О себе» – контактная информация

Вернуться к содержанию…

Кафедра общей физики

Электромагнетизм: Электростатика. Электрический ток – Конспект лекций

Владимир Борисович Осташев

Отпечатано с оригинал-макета Формат 60×90 $1/16$
Печатных листов 6,6 Тираж __ экз.

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)
(**СПбГТИ (ТУ)**)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Отпечатано в типографии ______________, т. +7-____________

цена 0 руб. 00 коп.